M. Smoluchowski

Über den Begriff des Zufalls

~~Über den Zufall und dessen Gesetze in der Physik.~~

~~Begriff und Gesetze des Zufalls~~ " — — —

Über den Begriff des Zufalls und die ~~Anwendbarkeit~~ Entstehung [Gesetze / den Ursprung d.] der Wahrscheinlichkeitsgesetze i. d. Ph.

Über

Manuskrypt posłany do Prof. W. Ostwalda (Grossbothen Sachsen)

dla „Annalen d. Naturphilosophie" (jeszcze nie wydrukowany)

Druck 1918 Planck-Heft 6
S. 252–263]

rękopis

[84]

Naturwissenschaften 1918, H. 17

[Oeuvres Vol. 6. s. 255-63]

Adresse d. Verf.: Prof. M. v. Smoluchowski Krakau, Studencka 27

Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik.

Von

Prof. M. v. Smoluchowski, Krakau. (Cursiv)

I.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwickelung mit grösstem Erfolg hauptsächlich in dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat sich in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauss' Zeiten als eigene Hilfs-Disziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der theoretischen Physik.

Zum ersten Male in den Jahren 1857–1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung, nach einer vorübergehenden Periode der Stagnation, infolge des schliesslichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet heute das wichtigste Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute zur Herrschaft gelangten Tendenz, sämmtliche Gesetze der Physik *) – nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie – auf Statistik verborgener Elementarereignisse zurückzuführen, wobei die „Einfachheit" derselben als sekundäre Folge des Wahrscheinlichkeitsgesetzes „der grossen Zahlen" aufgefasst wird.

Trotz dieser enormen Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte

---

*) Von dieser Tendenz sind bisher nur die Lorentz'schen Gleichungen der Elektronentheorie, das Energiegesetz und Relativitätsprinzip unberührt geblieben, aber es ist wohl möglich, dass im Laufe der Zeit auch hier exakte Gesetzesformen durch statistische Regelmässigkeit ersetzt werden dürften.

gemacht; es gilt wohl noch heute der Satz, dass keine zweite mathematische Disziplin auf so unklaren und schwankenden Grundlagen aufgebaut ist. So werden die Grundfragen nach der Subjektivität oder Objektivität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, nach der Definition der Zufälligkeit u.s.w. von verschiedenen Autoren in diametral entgegengesetzter ~~der verschiedensten~~ Weise beantwortet. Insbesondere ist auch eine allgemeine und mathematisch exakte Präzisierung der für die Anwendbarkeit dieser Rechnungsmethode charakteristischen Bedingungen noch immer ausständig, und man pflegt sich in dieser Hinsicht meist auf ein intuitives Wahrscheinlichkeitsgefühl zu verlassen.

Als kleiner Beitrag zu derartigen Untersuchungen mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefasst sein, welche von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ausgehen, in der gewisse grundsätzliche Schwierigkeiten in besonders krasser Form auftreten. Ich will eingestehen, dass gerade das Unbefriedigende der diesbezüglichen Ausführungen in gewissen, sonst höchst beachtenswerten neueren Werken die Entstehung dieser Studie veranlasst hat. Im übrigen bezweckt dieselbe selbstverständlich keineswegs eine allseitige und endgiltige Aufklärung des ganzen damit zusammenhängenden Komplexes philosophischer Fragen, ~~sondern will nur eine Anregung zu weiteren Untersuchungen in einer bestimmten Richtung geben~~ indem ~~sollen nur~~ einige Leitgedanken hervorgehoben werden, welche die bisher allzusehr vernachlässigte objektive Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ins rechte Licht setzen sollen.

II.

Die Frage, ~~auf~~ welche Ereignisse in den Geltungsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung fallen, wird wohl allgemein dahin beantwortet: ~~auf~~ diejenigen, deren Eintritt vom Zufall abhängt. Die Untersuchung dieses letzteren Begriffes ist also jedenfalls das Primäre, und wir werden uns vor Allem klar zu machen suchen, wodurch das Wesen des Zufalls gekennzeichnet ist. Damit hängen zwei vielumstrittene Probleme zusammen, deren Schwierigkeit angesichts der ~~gerade in den~~ exakten mathematischen Spekulationen der theoretischen Physik sich besonders fühlbar macht, nämlich: ~~die Frage~~

1). Wie ist es möglich, dass sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, dass also zufällige Ursachen gesetzmässige Wirkungen haben?

2). Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmässige Naturgesetze zurückzuführen ist? oder mit anderen Worten: Wie können regelmässige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmässigen, so sind diese Widersprüche gewiss vollständig unüberbrückbar. Ein solcher Zufallsbegriff ist jedoch mit dem

in der heutigen Wissenschaft herrschenden Determinismus unvereinbar. Meist pflegt man sich also die Sache durch die Annahme zu erklären, dass zwar zwischen der betreffenden Ursache und Wirkung ein gesetzmäßiger, kausaler Zusammenhang besteht, dass aber dessen Art für uns wegen der Komplikation der Erscheinung nicht erkennbar ist, wodurch der Schein der Gesetzlosigkeit entsteht. In diesem Sinne wäre der Zufall als eine uns „unbekannte Teilursache" zu bezeichnen; ~~dies entspricht der traditionellen Formulierung jenes Begriffs.~~

~~Vielleicht ist~~ Damit dürfte wohl auch Meinongs*) Auffassungsweise näher verwandt sein, als es den Anschein hat, welcher zufolge Zufälligkeit die „Tatsächlichkeit" von etwas „Nicht-Notwendigem" bedeuten würde; dabei soll nämlich die negierte Notwendigkeit entweder eine innere oder äussere (relativ zu einem gewissen Komplex von Objektiven) sein. Wenn man nun vom deterministischen Standpunkt aus Ursache und Wirkung als stets durch die inneren Notwendigkeitsbeziehungen ~~innerlich notwendige~~ der Teilereignisse verkettet ansieht, kann von Nichtnotwendigkeit nur in relativem Sinne die Rede sein: insofern die Notwendigkeit äusserlich nicht erkennbar ist, also insofern ein Teil der wirkenden Ursachen unbestimmt ist.

Diese herkömmliche Darstellungsweise, welche das Wesen des Zufalls ~~mit~~ auf unserer Unkenntnis der wirkenden Gesetze oder Ursachen ~~[illegible]~~ zurückführt, könnte man allenfalls noch als Beantwortung der zweiten der oben angeführten Fragen gelten lassen, aber es bleibt die erste Frage ungelöst, wieso eine Berechnung der Wirkung unerkennbarer Teilursachen möglich ist.

Die mannigfaltigen philosophischen Analysen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes geben hierüber keinen Aufschluss. Überhaupt handelt es sich dem Philosophen dabei meist um etwas ganz Anderes als dem Physiker. Er richtet seine Aufmerksamkeit vor Allem auf die subjektiven, psychologischen Momente des Wahrscheinlichkeitsgedankens, analysiert die erkenntnistheoretische Bedeutung desselben, untersucht in welcher Weise sich wahrscheinliche Aussagen, neben wahren und falschen Aussagen, in das System der formalen Logik einordnen lassen, pflegt aber die Frage nach der Art der denselben zu Grunde liegenden objektiven Tatsachen nicht näher zu berühren.

Im Gegensatz hiezu interessiert sich die exakte Naturwissenschaft nicht für Aussagen und nicht für subjektive — berechtigte oder unberechtigte — Vermutungen**), sondern für die objektive oder „mathematische" Wahrscheinlichkeit, d. i. für die relative Häufigkeit des Eintretens bestimmter zufälliger

*) A. Meinong, Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit. Leipzig 1915.

**) Meinong (loc. cit.) führt den Wahrscheinlichkeitsgrad auf die Stärke „berechtigter Vermutungen" zurück.

(3)

in der heutigen Wissenschaft herrschenden Determinismus unvereinbar. Jetzt pflegt man sich also die Sache durch die Annahme zu erklären, dass zwar zwischen der Ursache und Wirkung ein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht, dass aber dessen Art für uns wegen der Kompliziertheit der Bedingungen nicht erkennbar ist, so dass der Schein der Zufälligkeit entsteht. In diesem Sinne wird der Zufall als eine uns „unbekannte Ursache" bezeichnet. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Damit (nach Reininger*) [illegible]) [illegible] [illegible] Kategorie [illegible] die „Tatsächlichkeit" von etwas „Nicht-Notwendigem" bedeutet wird; dabei soll nämlich die negierte Notwendigkeit entweder eine innere, oder eine äußere (relative in einem gewissen Komplex von Objektiven) sein. Wenn man nun vom deterministischen Standpunkt aus Ursache und Wirkung als (durch ~~[illegible]~~) stets die innere Notwendigkeit der Beziehung als unabänderlich verkettet ansieht, kann von Nicht-Notwendigkeit nur in relativem Sinne die Rede sein: nur insofern die Notwendigkeit äußerlich nicht erkennbar ist, also insofern, als die [illegible] unbestimmt ist.

Diese [illegible] [illegible] welche der Zufall ~~[illegible]~~ und unserer Unkenntnis der einzelnen [illegible] ~~[illegible]~~ zuschreibt, könnte man noch als Beantwortung der zweiten der oben angeführten Fragen gelten lassen, aber es bleibt die erste Frage ungelöst, wie eine Berechnung der Wirkung unerkennbarer Ursachen möglich ist.

Die mannigfaltigen philosophischen Theorien des Wahrscheinlichkeitsbegriffes gehen darüber keinen Aufschluss. Überhaupt handelt es sich den Philosophen dabei meist um etwas ganz anderes als den Physikern. Sie richten ihre Aufmerksamkeit vor allem auf die subjektiven psychologischen Momente des Wahrscheinlichkeitsgedankens und lassen die elementare theoretische Bedeutung desselben unbeachtet, in welcher Weise sich wahrscheinliche Aussagen neben sicheren und falschen Aussagen in das System der formalen Logik einordnen lassen, pflegt aber die Frage nach der Art der Annahmen, zu Grunde liegenden objektiven Tatsachen nicht näher zu berühren.

Im Gegensatz hierzu interessiert sich die exakte Naturwissenschaft nicht für innere und nicht für subjektive — psychologische oder erkenntnistheoretische — Voraussetzungen, sondern für die objektive „mathematische" Wahrscheinlichkeit**), d. i. für die relative Häufigkeit des Eintretens bestimmter Erfolge.

*) R. Reininger, [illegible] [illegible] und Wahrscheinlichkeit. [illegible]

**) Reininger (loc. cit.) führt den Wahrscheinlichkeitsbegriff auf die Stärke der „[illegible] Vermutungen" zurück.

Ereignisse. Sie gebraucht also den – wie Meinong treffend bemerkt – so vieldeutigen Begriff der Wahrscheinlichkeit in einem sehr eingeschränkten Sinne, welchem jener Autor und andre Philosophen ~~wie Meinong~~ ~~vielleicht~~ allerdings lieber die Bezeichnung Möglichkeitsgrad beilegen dürften, welcher aber eben ~~werden, doch wird derselbe~~ erst in diesem engeren Sinne einer exakt mathematischen Behandlung zugänglich wird. Es verhält sich damit ähnlich wie mit vielen anderen Ausdrücken, wie z.B. Kraft, Arbeit, Energie, Wärme, welche der Physiker in wesentlich anderem Sinne versteht, als dies im gewöhnlichen Leben üblich ist.

Offenbar sind also, soweit die Anwendung in der theoretischen Physik in Betracht kommt, alle Wahrscheinlichkeitstheorien von vornherein als ungenügend zu betrachten, welche den Zufall als „unbekannte Teilursache" auffassen. Die physikalische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann nur von den Bedingungen abhängen, welche sein Zustandekommen beeinflussen, aber nicht von dem Grade unseres Wissens!

Ich bin mir wohl bewusst, dass dies im Gegensatz zu der allgemein üblichen Auffassung steht, welche eine teilweise Unkenntnis der Ursachen als das wesentliche hier in Betracht kommende Moment ansieht, darum sei als Beleg für unsere Behauptung bemerkt: Die Wahrscheinlichkeitsrechnungen der kinetischen Gastheorie würden ihre Berechtigung auch dann behalten, wenn wir die Beschaffenheit der Moleküle, deren Anfangslagen u.s.w. absolut genau kennen würden und im Stande wären, deren Bewegungen mathematisch exakt für alle Zeiten zu verfolgen. Sie wäre dann noch immer zum Wenigsten ein ebenso rationelles mathematisches Hilfsmittel wie die abgekürzte Multiplikation oder die Benützung der Logarithmentafeln (oder des Rechenschiebers) neben der üblichen exakten Multiplikation.

Wie pflegen nun die Vertreter der herkömmlichen Auffassung die Tatsache zu erklären, dass eine Berechnung der Wirkung unbekannter Teilursachen möglich ist? Sie berufen sich auf das „Gesetz der großen Zahlen", als ein zwar nicht beweisbares, aber empirisch unumstößlich erwiesenes Prinzip. So sagt z.B. Timerding*): … „die unverbrüchliche Kausalität in allem ~~Naturgeschehen~~ Naturgeschehen mag wohl aufrecht erhalten werden, sie reicht aber nicht hin, um die Regelmäßigkeit des Weltgeschehens vollständig zu erklären. Es gehört vielmehr die Tatsache hinzu, die wir als Gesetz der großen Zahlen bezeichnen, und die bewirkt, dass die

*) H. E. Timerding, Die Analyse des Zufalls p. 162 (Vieweg 1915).

Unregelmässigkeiten, die sonst durch die zufälligen Ereignisse in die Welt hineingetragen werden, in dem Gesammtergebnis wieder verschwinden. .... Unser Verstand sträubt sich allerdings dagegen, ein solches Prinzip nur deshalb anzunehmen, weil hier und dort seine Richtigkeit bezeugt wird, vielmehr drängt er dahin, auch einen inneren Grund für einen solchen Ausgleich zu finden. Ein solcher innerer Grund lässt sich aber nicht ermitteln. ....“

Das ist wohl eine wenig erfreuliche Lösung, und man wird trachten, einen anderen Ausweg aus dem Dilemma zu finden. Übrigens ~~[illegible]~~ bemerkt beispielsweise Poincaré, dass ~~es~~ auch in der abstrakten Mathematik (von Wahrscheinlichkeitsgesetzen geredet werden kann) ~~einen Zufall gibt~~, dass z.B. die Häufigkeit der Zahlen 1, 2, 3, ... an der letzten Stelle der Zahlenkolonnen einer Logarithmentafel dem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsgesetz gleich möglicher Fälle folgt. Wird sich der Mathematiker damit begnügen, hierin das Walten eines unbegreiflichen, rein empirischen Gesetzes der großen Zahlen ~~zu~~ anzuerkennen?

III.

Ein Fingerzeig zur Lösung der Frage scheint mir darin zu liegen, dass die oben erwähnten Definitionen des Zufalls als unbekannter Teilursache*) u. dgl. zweifellos viel zu weit sind. Als Leverrier bemerkte, dass die Bewegung des Uranus nicht genau mit der Vorausberechnung übereinstimme, sagte er nicht: das ist Zufall! — Wir haben keine Ahnung, wann eine magnetische Störung stattfinden wird, halten aber das Eintreten derselben doch durchaus nicht für eine Sache des Zufalls.

Es fehlt in diesen Beispielen ein ganz wesentliches Merkmal desjenigen, was man im gewöhnlichen Leben oder in unserer Wissenschaft als Zufall bezeichnet, und zwar lässt sich dieses kurz in die Worte fassen: Kleine Ursache — große Wirkung! Ein minimaler Unterschied im Ingangsetzen der Roulette — Gewinn oder Verlust einer Unsumme Geldes.

Poincaré, welcher hierauf nachdrücklich hingewiesen hat, gibt zwar noch zwei Alternativ-Merkmale des Zufalls an**): Kompliziertheit vieler mitwirkender Ursachen oder gegenseitige

---

*) Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung p. 8) sagt „unbekannte und wechselnde Umstände“. Es ist wohl nicht recht klar, was mit „wechselnd“ gemeint ist und wie der Wechsel zu erkennen ist, wenn der Umstand selber unbekannt ist. ~~Es dürfte~~ Vielleicht ist das aber ein intuitives Herausfühlen der Kriterien, die wir später besprechen werden.

**) H. Poincaré, ~~Paris 1912; Introduction~~ Calcul des probabilités, Paris 1912, Introduction.

Einwirkung weiter für gewöhnlich zu unabhängigen Gebieten gehöriger Vorgänge, doch glaube ich, dass sämmtliche dazugehörigen Fälle sich bei genauer Analyse ebenfalls unter jenen Gesichtspunkt einordnen lassen.

Besonders charakteristisch tritt jenes Merkmal in allen Fällen auf, wo es sich um einen Zustand labilen Gleichgewichts handelt. Denken wir uns einen „idealen" Würfel auf eine Ecke gestellt, so ist die kleinste Verschiebung des Schwerpunktes aus der Vertikalen schon dafür entscheidend, auf welche der drei unten zusammenstossenden Flächen der Würfel zu liegen kommen wird. Welche Zahl also obenauf erscheinen wird, das so sagt man, hängt vom Zufall ab. Mathematisch ausgedrückt: die Wirkung y (obenauf erscheinende Zahl) hängt von der Ursache x (Lage des Schwerpunktes) derart ab, dass die Funktion $y = f(x)$, in dem betreffenden Gleichgewichtswerte x_0 eine Unstetigkeit aufweist.

Nebenbei bemerkt, setzt sich die Ursache in diesem Falle eigentlich aus zwei Variabeln zusammen: wenn man sich den Schwerpunkt O und die drei in der unteren Ecke E zusammenstossenden Kanten auf die Horizontalebene projiziert, sieht man, dass die Entfernung $r = \overline{OE}$ in der so erhaltenen Projektion für die Geschwindigkeit massgebend ist, mit welcher das Umfallen erfolgt, die durch einen Winkel θ definierbare Richtung des Vektors OE in Bezug auf die drei Kantenlinien für die Zahl, welche obenauf ~~zu~~ erscheinen wird.

Nun entzieht sich aber ein derartiger Zufall jeder apriorischen Berechnung und kann auch niemals die Grundlage zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden. Denn solange man die bestimmenden Ursachen (Richtung und Stärke des Vektors OE) nicht mit genügender Genauigkeit kennt, lässt sich bezüglich des Effektes überhaupt gar nichts voraussagen. Kennt man sie aber, so ist die Wirkung mit Gewissheit vorauszusehen, und es bleibt kein Raum für Wahrscheinlichkeit übrig.

Als Beispiel eines unberechenbaren Zufalls sei noch ein anderer Fall angeführt: wenn ein Artillerist mit einem mathematisch exakt schiessenden ~~Ge~~ Geschütz nach einem Ziel schiesst, dessen Entfernung ihm unbekannt ist. Es fehlt ihm die Kenntnis einer der Variabeln, ~~welche~~ von denen die richtige Elevation abhängt, und es wäre ein blinder Zufall, wenn er einen Treffer erzielen würde. Von irgend einer Vorausberechnung, von einer Wahrscheinlichkeit in unserem Sinn, kann da gar nicht die Rede sein, solange uns die Psychologie jenes Artilleristen nicht näher bekannt ist.

Sobald wir aber wissen, dass derselbe eine gewisse ~~Art~~ Methode systematischen Einschiessens anwendet, oder sobald gewisse mechanische Hilfsmittel von später zu besprechender Art (z.B. Rotation des Geschützrohres um die Lageraxe) mitspielen, wird die Aufgabe eine ganz definirte, und lässt sich (mit Rücksicht auf die Grösse des Zieles und seine Entfernung usw.) eine bestimmte Treffwahrscheinlichkeit angeben.

Der einer Wahrscheinlichkeitsberechnung entsprechende — vielleicht darf man sagen: der „geregelte" — Zufall zeichnet sich also von dem Zufall im weiteren Sinne durch ein wesentliches Charakteristikum aus: eine gewisse Regelmässigkeit der Wirkung bei oftmaliger Wiederholung des Vorganges, unabhängig von der speziellen Art der Ursache.

Lässt man den vorher besprochenen Würfel aus der Höhe eines Meters auf eine ideal ebene (unvollkommen elastische) Unterlage fallen, so ändert sich jener Vorgang in wesentlicher Weise. Der Würfel prallt ab, steigt empor und wiederholt diese Bewegungen mehrmals mit abnehmender Amplitude und unter Annahme scheinbar unregelmässiger Rotationsbewegungen, bis er auf irgend einer seiner sechs Seiten liegen bleibt. Auf welche er schliesslich zu liegen kommt, muss natürlich von der Art der anfänglichen Abweichung aus der axial-lotrechten Stellung abhängen, aber die Funktion $y = f(r, \theta)$, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, wird so beschaffen sein, dass bei kontinuierlicher Variation der zwei die Anfangslage definirenden Variabeln r, θ, in äusserst raschem Wechsel Gebiete durchschritten werden, welche allen möglichen Endlagen entsprechen, derart dass bereits innerhalb eines äusserst kleinen Variabilitätsbereiches V der Axenstellung (in Bezug auf die Lotrechte) die den Zahlen 1–6 zugehörigen Bereiche ungefähr flächengleich werden. Diese Grösse V könnte man vielleicht mit dem Namen Ausgleichsgebiet belegen.

Würde man nun versuchen, den Würfel vor dem Fallenlassen durch menschliche Hilfsmittel in irgend einer Weise zu orientiren, so ist klar, dass dabei gewisse Einstellungsfehler trotz grösster Sorgfalt unvermeidlich sind. Den Bereich dieser unvermeidlichen Fehler wollen wir als Schwankungsbereich Ω bezeichnen, und man darf wohl annehmen, dass die Verteilungs-Function $\varphi(r, \theta)$, welche die relative Häufigkeit jener Fehler bei unzähliger Wiederholung der Versuche darstellt, einen regelmässigen „analytischen" Charakter besitze. Ist daher das (durch die Art der zwangsläufigen Function $f(r, \theta)$ bestimmte) Ausgleichsgebiet V klein im Vergleich zum individuellen Schwankungsbereich Ω, so ist leicht einzusehen, dass schliesslich für alle Zahlen 1–6 eine gleiche Wahrscheinlichkeit resultiren muss, unabhängig von der speziellen Art der beabsichtigten Einstellung und von der individuellen Variationsfunction $\varphi(r, \theta)$. Das Einzel-

ereignis ist also nicht vorauszusehen, wohl aber die Gesamtverteilung der Ereignisse bei fortgesetzter Wiederholung. In einem solchen Falle waltet der Zufall in gesetzmäßiger Weise.

Einfacher als der obige Fall ist das Beispiel der Roulette, an welchem Poincaré x) analoge Betrachtungen anstellt, oder das Beispiel der einem Schützen als Ziel dienenden rotierenden Sektoren-Scheibe. Ob derselbe einen schwarzen oder weissen Sektor treffen wird, hängt vom Zeitpunkt ab, wann das (feststehende) Gewehr abgedrückt wird. Man kann aber immer die Scheibe in so rasche Rotation versetzen, dass die Treffsicherheit des Schützen ausgeschaltet wird. Mag er sich in einem beliebigen Moment entschließen, loszudrücken, jedenfalls vergeht vom Entschluss bis zur Tat noch eine unbestimmte, in gewissen Grenzen variable Zeit, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuss gerade zur Zeit t losgeht, durch eine (im Schwankungs-Bereich von t bis $t+\tau$ von Null merklich verschiedene) Funktion $\varphi(t)$ dargestellt wird, von der anzunehmen ist, dass sie keine singulären Eigenschaften, wie Unstetigkeiten, außerordentlich viele Maxima und Minima u. dergl. aufweist, deren Form aber sonst gleichgültig ist.

Entfallen also auf den Schwankungsbereich τ der Zeit genügend viele Rotationen der Scheibe, so verschwindet der Einfluss der individuellen Form der Verteilungsfunction $\varphi(t)$, die Wahrscheinlichkeit einen weissen oder schwarzen Sektor zu treffen, hängt dann nur vom relativen Flächeninhalt derselben ab. Man pflegt dann von jener Wahrscheinlichkeit schlechthin zu reden, ohne Rücksicht auf die Function φ, aber stillschweigend macht man doch betreffs φ die vorher erwähnten Annahmen. Jene Wahrscheinlichkeitsüberlegung würde beispielsweise ganz gegenstandslos werden, falls das Gewehr mit der Sektoren-Scheibe mittels eines elektrischen Kontaktes (in passender Weise) verbunden wäre.

In letzter Linie basiert die ganze Argumentation offenbar auf die Tatsache, dass jede (differenzierbare) Funktion sich im Bereich genügend kleiner Veränderungen der unabhängigen Variabeln angenähert proportional mit denselben ändert, und sie lässt sich durch eine einfache geometrische Analogie illustrieren: wenn man auf ~~Millimeter~~ Papier, das in schmale, gleichbreite, (alternierend) weisse und schwarze Flächenstreifen zerlegt ist, aus freier Hand eine beliebige (aber nicht zu kleine und nicht zu unregelmäßige!) geschlossene Curve zieht, so wird der von derselben ausgeschnittene „weisse" und „schwarze" Flächeninhalt sehr nahe gleich groß sein, ohne Rücksicht auf die Art jener Curve. Letztere entspricht dem, was wir individuellen Schwankungsbereich genannt haben, während die Zerlegung des Papiers in Flächenstreifen durch die Art der zwangsläufigen Kausal-Relation $y = f(x)$ bestimmt ist.

Somit sehen wir, wie für die Wirkung des Zufalls ein bestimmtes Gesetz resultieren kann, ohne Rücksicht auf die spezielle Form jener unbekannten, primären Verteilungsfunction φ, womit der erste der im II. Abschnitte hervorgehobenen Widersprüche seine Aufklärung findet. Allerdings muss man zugestehen, dass unsere Überlegungen das eigentliche Wesen des Zufalls noch nicht erschöpfend darstellen, denn sie beruhen ja auf der Annahme einer Verteilungsfunction φ für die zufälligen ~~Fehler~~ Schwankungen der Ursache, von der überdies eine gewisse Eigenschaft (ein „regelmäßiger Verlauf") vorausgesetzt wird. Dieser Umstand findet seinen Ausdruck in einer — übrigens ganz

x) Poincaré, loc. cit.

zutreffenden Aussage, mit welcher sich Mathematiker*) über diese Fragen hinwegzusetzen lieben: Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht Erklärung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, sondern die Ermittelung derselben auf Grundlage der als bekannt angenommenen Wahrscheinlichkeit eines einfacheren dasselbe verursachenden (oder dadurch bewirkten) Vorganges.

~~III~~ IV.

Fassen wir das bisher Gesagte in verallgemeinerter Form zusammen:

Der Ausdruck Zufall wird zur Bezeichnung einer speziellen Art von Kausal-Relationen gebraucht. Man sagt nämlich (gewöhnlich), dass ein Ereignis y vom Zufall abhängt, wenn es eine solche Funktion einer (eventuell auch ihrem Werte nach unbekannten oder absichtlich ignorierten) ~~[illegible]~~ veränderlichen Ursache oder Teilbedingung x ist, dass das Eintreten oder Nichteintreten derselben von einer sehr kleinen Änderung des x abhängt [wobei unter „klein" verstanden wird: „klein im Verhältnis zum Schwankungsbereich des x"]. (2)

Dieser populäre Zufallsbegriff eignet sich jedoch nicht als Grundlage eines exakt definierbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Von einem mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetz $W(y)$ kann betreffs einer Grösse y erst dann gesprochen werden, wenn die Kausal-Relation $y = f(x)$ ~~[illegible]~~ ausser der vorhererwähnten noch eine spezielle Eigentümlichkeit besitzt, nämlich wenn die Verteilung der y, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, unabhängig ist von der Art der Verteilungsfunktion $\varphi(x)$, welche die relative Häufigkeit der x bestimmt (vorausgesetzt, dass die Funktion $\varphi(x)$ einen „regelmässigen" Verlauf habe).

Eine kurze hinreichende mathematische Bedingung lässt sich für den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln leicht aufstellen, wenn man die früher dargelegten Beispiele ins Auge fasst. Es genügt nämlich, dass die Funktion $y = f(x)$ einen derartigen „oszillierenden" Charakter habe, dass: 1). für jeden innerhalb des Schwankungsbereiches Ω gelegenen x_0 Wert ein solches,

A.Z. im Verhältnis zu Ω äusserst kleines Δx angebbar ist, dass die Funktion $y = f(x) = f(x_0 + \varepsilon \Delta x)$ sämmtliche y Werte (innerhalb gewisser Grenzen) durchläuft, sobald die Variable ε die Werte von 0 bis 1 durchläuft

2). dass der Bruchteil des ε-Gebietes, welcher einem gewissen Gebiet von y-Werten entspricht, für alle innerhalb Ω gelegene x_0 Punkte (annähernd) gleich gross ist.

~~Es~~ Für jedes x gibt es also einen kleinsten Bereich Δx, welchem eine Variation über alle Werte y entspricht, und die Grösse desselben definiert gewissermassen die Struktur der ~~Wahrscheinlichkeit~~ Kausal-~~Relation~~ Funktion $f(x)$; je „feinkörniger" dieselbe ist, d. h. je kleiner jene Δx sind, desto geringer sind die Anforderungen, welche man betreffs der ~~Gleichförmigkeit der~~ „Regelmässigkeit" der primären Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ stellen muss, um ein von der Art derselben unabhängiges Resultat für die Verteilung $W(y)$ zu erhalten.

---

*) Siehe z.B. E. Borel, Le Hasard, Alcan Paris 1914, p. 15.

Natürlich ist dabei umgekehrt ein jeder y Wert durch eine Menge verschiedener x realisierbar, d.h. die inverse Funktion ist in hohem Grade <u>vieldeutig</u>: die gleiche Wirkung kann durch sehr verschiedene ursächliche Konstellationen hervorgebracht werden — ebenfalls ein sehr charakteristischer Zug jener ~~[illegible]~~ Kausal-Relationen, welche die Entstehung von Wahrscheinlichkeitsgesetzen veranlassen.

Spezielle Beispiele derartiger funktionaler Zusammenhänge sind leicht zu geben z.B.: $y = \sin(\frac{x}{\alpha})$. Setzen wir voraus, dass α äusserst klein ist im Vergleich zum Schwankungsbereich der „Ursache“ x, so wird auch $\Delta x = \frac{2\pi}{\alpha}$ sehr klein, und es resultiert für die „Wirkung“ y eine von der Wahrscheinlichkeit der x weitgehend unabhängige Häufigkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Noch einfacher ist der früher betrachtete Fall der rotierenden Scheibe. Hiebei nehmen wir als x die Zeit t an, zu welcher der Schuss losgeht, als y die Winkeldistanz θ des Treffpunktes in der Scheibenebene (von einem bestimmten Radius derselben ab gerechnet). Es ist also: $\theta = ct - 2n\pi$, wobei die Winkelgeschwindigkeit c eine sehr grosse Zahl sein soll und n immer so gewählt wird, dass θ zwischen 0 und 2π gelegen sei. Der Bereich Δx ist offenbar auch in diesem Falle gleich $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$, und es werden alle Winkel θ gleichwahrscheinlich sein, wenn diese Grösse klein ist in Vergleich mit dem Schwankungsbereich der Ursache.

Es gibt jedoch ausserdem noch zahlreiche der mathematischen Analyse nicht so leicht zugängliche Fälle, in denen die Unabhängigkeit des resultierenden Wahrscheinlichkeitsgesetzes von der Art und Ursache der primären Schwankungen mit beliebiger Annäherung mittels rein physikalischer Vorrichtungen hervorgebracht wird. Als typische derartige Fälle seien nachstehende Beispiele etwas eingehender besprochen:

<u>I). Das Galton'sche Brett.</u> Es besteht aus einem geneigt aufgestellten Brett, in welches eine grosse Anzahl von Stiften, in regelmässigen Horizontalreihen angeordnet, eingeschlagen wurden, und zwar ist die Anordnung derselben eine alternierende, so dass die Stifte jeder Reihe den Öffnungen der beiden benachbarten Reihen entsprechen. Werden nun von einem gegebenen Punkt aus Kugeln von passender Grösse (so dass ihr Durchmesser wenig kleiner sei als der freie Abstand zwischen zwei benachbarten Stiften) über das Brett rollen gelassen, so werden sie infolge der Zusammenstösse mit jenen Stiften aus ihrer Bahn ~~abgelenkt~~ in unregelmässiger Weise abgelenkt und sammeln sich schliesslich nach Passierung sämmtlicher Stiftreihen in den am unteren Brettrande angebrachten Behältern an, so dass die Höhe, zu der sie in denselben reichen, direkt als Mass der Wahrscheinlichkeit der betreffenden Lage dienen kann.

Es zeigt sich, dass sie sich dabei stets gemäss dem Gauss'schen Fehlergesetz: $y = Ae^{-\alpha x^2}$ anordnen, so dass die meisten sich in der Falllinie des Ausgangspunktes ansammeln, während ihre Zahl nach beiden Seiten zu nach Massgabe der bekannten Glocken-Curve abnimmt. Dieses Resultat ist mathematisch leicht erklärlich, sobald man annimmt, dass eine jede Kugel nach dem Austritt aus der Öffnung zwischen zwei Stiften gleiche Wahrscheinlichkeit dafür besitzt, dass sie die nächste Stiftreihe zur Rechten oder zur Linken des darunter stehenden Stiftes passieren wird.

Erfolgt nämlich dieser Vorgang ganz zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit für rechts und links, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel beim Passiren der m ten Stiftreihe eine dem n fachen Nagelabstand gleiche seitliche Entfernung aus der Mittellinie besitze, nach dem bekannten Bernoulli'schen Satze zu $W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{m!}{(\frac{m}{2}-n)!\,(\frac{m}{2}+n)!}$ bestimmen, was für grosse Werte der Zahl m angenähert in die vorerwähnte Formel übergeht. Es wird also die komplizirte Gesamterscheinung auf einfache Elementarvorgänge zurückgeführt, aber es bleibt noch aufzuklären, wieso letztere als ganz zufällig angesehen werden können, obwohl eigentlich die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der Kugel die weitere Bewegung derselben eindeutig bestimmen sollte.

Um unkontrollirbare Nebenumstände möglichst auszuschalten, idealisiren wir das Beispiel durch Voraussetzung vollständiger Glattheit der schiefen Ebene, exakter Anordnung der Stifte, exakter Kugelgestalt der Kügelchen und nehmen wir ferner an, der Kugeldurchmesser sei fast genau gleich dem freien Abstand der ~~Nagel~~ Stifte, und die Stösse der Kugeln an letzteren mögen unelastisch verlaufen. Offenbar ist dann die nach Austritt der Kugel zwischen zwei Stiften spurenweise übrig bleibende Horizontalkomponente der Geschwindigkeit allein massgebend dafür, ob der nächste Stift auf der rechten oder linken Seite getroffen wird, ob also die Kugel denselben auf der einen oder anderen Seite passiren wird. Jene Horizontalkomponente ist aber das Resultat vielfacher Reflexionen der Kugel zwischen jenen zwei Stiften und ist durch die Lage der Zentrilinie beim ersten Stoss an der betreffenden Stiftreihe eindeutig bestimmt. Eine ganz minimale Lagenänderung dieser Zentrilinie genügt um zu bewirken, dass die Richtung jener Horizontalkomponente umgekehrt wird; bei weiterer äusserst geringer Lagenänderung wird dieselbe wieder umgekehrt u.s.w.

Wir erkennen im Obigen die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: 1). „Kleine Ursache – grosse Wirkung", 2). den oszillirenden Charakter der Kausal-Relation, welcher sich ungenau aber ~~deutlich~~ bezeichnend auch durch die Worte ausdrücken lässt „Verschiedene Ursachen – gleiche Wirkungen" 3). die annähernd gleichmässige Verteilung der Chancen der Elementarereignisse. Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Funktion, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel darstellt, den analytischen Charakter. Die Chancen für eine positive und negative Verschiebung werden bei jedem Stoss genau gleich gross, und es wird sich die Gauss'sche Glockencurve herstellen, ganz unabhängig davon wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellation der Kugeln sei (vorausgesetzt sie ist nicht genau gleich Null). Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Dieser Vorgang bildet, nebenbei bemerkt, eine treffliche Illustration einer ganzen Klasse physikalischer Erscheinungen, welche wir im Allgemeinen als Diffusion und Wärmeleitung zu bezeichnen pflegen. Ohne an dieser Stelle in Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir beispielsweise, dass die seitlichen Verschiebungen, welche die Kugel beim Hindurchrollen durch die aufeinanderfolgenden

Stiftreihen erhöht, genau mit den der sogen. Brown'schen Molekularbewegung entsprechenden Verschiebungen übereinstimmen. Und würden wir ~~anstatt die Kugeln~~ diese Versuche dadurch modifizieren, dass wir ein „begrenztes Galton'sches Brett" verwenden, dessen Seiten-Ausdehnung durch zwei in der Falllinie verlaufende Leisten begrenzt ist, und dass wir aus allen Öffnungen der obersten Stiftreihe auf der rechten Hälfte des Brettes schwarze, auf der linken Hälfte weiße Kugeln austreten lassen, so würde deren allmähliche Vermischung beim Passieren der Stiftreihen genau der Diffusion zweier Gase in den bekannten Versuchen Loschmidts entsprechen. Besitzt das „begrenzte Galton'sche Brett" eine hinreichende Länge, so ~~[illegible]~~ muss eine homogene Endverteilung resultieren.

II). Ein in mathematischer Hinsicht komplizierteres, aber physikalisch noch einfacheres Beispiel ist das Folgende: Denken wir uns ein unregelmäßig, aber im Übrigen beliebig geformtes Gefäß, mit vollkommen reflektierenden Wänden, in welches wir durch ein sehr kleines, in einer Wand angebrachtes Loch ein elastisches Kügelchen, (am besten ein Gasmolekül) hineinschleudern, und überlegen wir, wann das Kügelchen wieder durch jenes Loch aus dem Gefäße austreten dürfte. Sofern die Öffnung im Verhältnis zur ganzen Wandfläche genügend klein ist, wird die Kugel im Allgemeinen infolge der vielfachen Reflexionen einen äußerst komplizierten Zickzackweg zurücklegen müssen, bis es die Austritts-Stelle erreicht, und es ist klar, dass eine ganz minimale Änderung der Anfangsrichtung nach längerer Zeit eine sehr erhebliche Änderung der Bahn und damit auch eine bedeutende Änderung der Austrittszeit hervorrufen muss. Ebenso begreift man, dass dieselbe Austrittszeit mittels sehr verschiedener Anfangskonstellationen zu erreichen ist — man braucht hierzu nur verschiedene Austrittsbahnen rückwärts zu verfolgen. Es scheint also die Möglichkeit einer Wahrscheinlichkeitsberechnung gegeben zu sein.

Allerdings ist eine exakte mathematische Analyse wohl noch nicht durchgeführt worden, aber physikalische Überlegungen aus dem Gebiete der kinetischen Gastheorie, wie auch der Strahlungstheorie, wo dasselbe Problem in anderer Form zur Sprache kommt, machen es plausibel, dass bei ganz beliebiger Verteilung der Anfangsrichtungen im Laufe der Zeit eine Ausgleichung der Wahrscheinlichkeit ~~[illegible]~~ stattfindet, so zwar dass dann jedes Volumelement jenes Hohlraumes für die Kugel einen gleich wahrscheinlichen Aufenthaltsort bildet, dass sie sich in irgend einer Richtung gleich wahrscheinlich bewegt und dass sie durchschnittlich auf jedes Flächenelement der Gefäßwand gleich häufig auftrifft.

Wird die Geschwindigkeit der Kugel mit c, das Volumen des Gefäßes mit V, und der Querschnitt der freien Öffnung mit w bezeichnet, so lässt sich nach Analogie mit gastheoretischen Rechnungen leicht nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Austritt der Kugel während des Zeitraumes τ erfolge, beträgt: $W = \frac{wc\tau}{4V}$; also ist die durchschnittlich bis zum Austritt der Kugel aus dem Gefäß verfliessende Zeit: $T = \frac{4V}{wc}$.

Diffusion erfolgt ganz mit der der rohen [illegible] Diffusion überhaupt entsprechenden Verteilungs-gesetzmässigkeiten. Wird z. B. der ~~[illegible]~~ dieses [illegible] durch [illegible] Gefäß [illegible] Luft- oder Wasser-[illegible] durch [illegible] in den [illegible] [illegible] ist, und dass sie aus allen [illegible] der [illegible] auf der rechten Hälfte des [illegible] [illegible] auf der linken Hälfte [illegible] so wird [illegible] allmählich [illegible] [illegible] der [illegible] Diffusion [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] "[illegible]" [illegible] [illegible].

~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

II) [illegible] mathematischen [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ist der Folgende: Denken wir uns ein [illegible], aber in [illegible] vollständig geschlossenes Gefäß mit vollkommen reflektierenden Wänden, in welches wir durch ein sehr kleines in einer Wand angebrachtes Loch ein elastisches Kügelchen (am besten ein [illegible]) hineinschleudern, und überlegen wir, wann das Kügelchen wieder durch jenes Loch aus dem Gefäß heraus [illegible]. [illegible] die Öffnung im Verhältnis zur ganzen Wandfläche genügend klein ist, wird die Kugel im Allgemeinen infolge der vielfachen Reflexionen einen äusserst komplizierten Zickzackweg zurücklegen müssen, bis sie die [illegible] Stelle erreicht, und es ist klar, dass eine ganz minimale Änderung der Anfangsrichtung [illegible] [illegible] [illegible] oder [illegible] Änderung der Bahn und [illegible] eine [illegible] Änderung der [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], dass [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Anfang [illegible] [illegible] [illegible] ist — man [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] zu [illegible]. Es scheint also die Möglichkeit einer [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] zu sein.

Allerdings ist eine exakte mathematische Analyse [illegible] [illegible] nicht [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] Überlegungen [illegible] [illegible] [illegible] der [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]-theorie, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Form [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Verteilung der Anfangsrichtungen im Laufe der Zeit eine [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible], so [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] für die Kugel [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] sie sich in irgend einer Richtung [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] auf jedes Flächenelement des Gefäßraums [illegible] [illegible] [illegible].

Wird die Geschwindigkeit der Kugel mit c, das Volumen des Gefäßes mit V und der Querschnitt der feinen Öffnung mit ω bezeichnet, so lässt sich nach Analogie mit gastheoretischen Rechnungen leicht nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Austritt der Kugel während der Zeitdauer τ erfolge, beträgt: $W = \frac{\omega c \tau}{4V}$; also ist die durchschnittliche bis zum Austritt der Kugel aus dem Gefäß erforderliche Zeit: $T = \frac{4V}{\omega c}$

In noch weit höherem Grad kommen übrigens die charakteristischen Züge des (geregelten) Zufalls zur Geltung, wenn es sich um die Bewegung einer Schar von Kugeln handelt, welche in ein geschlossenes Gefäß eingesetzt werden, da dann die gegenseitigen Zusammenstöße derselben vor Allem ~~darauf~~ die Wirkung haben, den ursprünglich vorhandenen Bewegungszustand in unregelmäßiger Weise zu stören.

Es ist das ein Spezialfall der von Boltzmann als allgemeine Eigenschaft molekularer Systeme erkannten Tendenz zur molekularen Unordnung, auf welcher ~~an der~~ die kinetische Erklärung des Entropiesatzes beruht.

V.

Die Überlegungen, mittels welcher wir in Abschnitt III und IV das Wesen des Zufalls zu charakterisieren und die Gesetzmäßigkeit der Wirkungen desselben zu erklären suchten, scheinen mir, wie bereits ~~andeutungsweise~~ vorher angedeutet wurde, in zweifacher Hinsicht nicht ganz befriedigend zu sein:

1). Es wurde angenommen, dass die „Ursache" x ein Wahrscheinlichkeitsgesetz $\varphi(x)$ befolgt, also wurde dieser Begriff als etwas Primäres vorausgesetzt. Gegenstand der Erklärung war nur die Unveränderlichkeit des Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die resultierende Wirkung.

2). Es wurden gewisse Eigenschaften der Funktion $\varphi(x)$ vorausgesetzt, welche wir als „Regelmäßigkeit" bezeichnet haben.

Diese zwei Bemerkungen machen uns vor Allem auf einen mehr formalen Mangel ~~jener~~ unserer Darstellung aufmerksam. Was bedeutet es nämlich, wenn wir sagen, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des x (Handbewegung beim Ingangsetzen der Roulette, Orientierung des fallengelassenen Würfels, der Kugel auf dem Galton'schen Brett) durch eine (regelmäßige) Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ bestimmt ist? Handelt es sich um ein x, welches wir nicht auf noch primärere Ursachen zurückführen können, so wäre das Gesetz $\varphi(x)$ nur empirisch ~~bestimmbar~~ erkennbar. Unmittelbar gegeben sind aber nur diskrete Einzelfälle, und erst durch Abstraktion auf Grund unzählig vieler Spezialfälle kommt man dazu, auf deren Grund die Häufigkeitsfunktion $\varphi(x)$ zu formulieren, von welcher die Eigenschaft (2) vorausgesetzt wird.

Es wäre also weit rationeller, wenn wir den Umweg über die Einführung der abstrakten ~~Häufigkeits~~ Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ ganz vermeiden und direkt nur eine gewisse Menge von Einzelfällen in Betracht ziehen würden. ~~Stelle des hervorgehobenen Satzes d~~ Versuchen wir also anstatt der hervorgehobenen Stelle des

IV Abschnittes ~~könnte man also sagen~~ folgenden Satz zu setzen: Von einer mathematischen Wahrscheinlichkeit kann nur dann die Rede sein, falls ~~die~~ den kausalen Zusammenhang zwischen zufälligen*) Ursache x und Wirkung y darstellende Funktion $y = f(x)$ derart beschaffen ist, dass einer beliebig verteilten Menge von x Werten immer annähernd eine und dieselbe Verteilung der zugehörigen y Werte entspricht. Dabei soll das Wörtchen „annähernd" den Umstand ausdrücken, dass exakte Identität der y-Verteilungen nur bei unendlich zahlreichen Mengen zu erwarten ist.

Am Klarsten übersieht man diese Verhältnisse bei der rotierenden Scheibe: im Allgemeinen wird dieselbe von den Treffpunkten ungefähr gleichförmig überdeckt sein, falls eine genügende Anzahl von Schüssen in beliebigen Zeit-Intervallen abgegeben wird, und die Verteilung der Trefferdichte auf der Scheibe wird verhältnismäßig desto gleichförmiger sein, je größer die Anzahl der Schüsse. Nun sind aber offenbar auch ganz abweichende Ergebnisse möglich. Wären z.B. alle Zeit-Intervalle gleich und mit der Umlaufszeit der Scheibe kommensurabel, so würden sich alle Treffpunkte auf gewisse Stellen konzentrieren, während der Rest der Scheibe leer bleiben würde. Das wäre ein entscheidender Einwand gegen die Anwendbarkeit der ~~zuletzt gewählten~~ in Rede stehenden Formulierung unseres Satzes, wenn uns nicht die Erwägung zu Hilfe käme, dass derlei abweichende Anordnungen nur gewisse „singuläre" Ausnahmsfälle bilden, deren Häufigkeit im Verhältnis zu allen möglichen Anordnungen offenbar verschwindend klein ist.

In der Mengenlehre beweist man bekanntlich, dass es — populär ausgedrückt — unendlich mal so viele irrationale Zahlen gibt als ganze Zahlen, und in analoger Weise sieht man ein, dass unter allen möglichen Intervall-Längen diejenigen, welche mit der vorgegebenen Umlaufszeit kommensurabel sind, nur einen ~~verschwindend~~ unendlich kleinen Bruchteil bilden. Werden also aufs Geratewohl verschiedene Intervall-Längen gewählt, so ist es unendlich wenig wahrscheinlich, dass man gerade solche treffen wird, welche mit der vorgegebenen exakt kommensurabel sind. Somit wird „im Allgemeinen" eine annähernd gleichförmige Überdeckung der Scheibe resultieren.

Analoges gilt auch in anderen Fällen. Hat z.B. das im Abschnitt IV (2) erwähnte Gefäss die Gestalt eines „mathematischen Würfels", so ist leicht einzusehen, dass die hineingeschleuderte Kugel sich trotz beliebig vieler Reflexionen nur in ~~acht~~ einer von acht bestimmten Richtungen bewegen kann. Es genügt aber eine beliebig kleine Abweichung der

*) „zufällig" in dem vorher definierten Sinne.

Neigungswinkel der Wände, um diese Anordnung nach entsprechend langer Zeit zum Verschwinden zu bringen und sämmtliche Richtungen des Raumes für die Bewegung der Kugel ~~annähernd~~ gleich wahrscheinlich zu machen. Falls also nicht ein [speziell] „ad hoc" mathematisch genau konstruiertes Gefäss ausgesucht wird, so müssten innerhalb einer Schar derartiger Kugeln ~~durch~~ die Reflexionen derselben an den Gefässwänden [ausserdem auch ~~durch~~ die gegenseitigen Zusammenstösse!] eine Gleichverteilung der Bewegungsrichtungen im Raume ~~zu~~ hervorbringen.

Bis in alle Einzelheiten lassen sich diese Verhältnisse in einem ähnlichen aber zweidimensionalen Beispiele übersehen, in welchem die mit den Reflexionen an den Wänden verbundenen Diskontinuitäten vermieden werden sollen. Stellen wir uns einen Punkt vor, welchen wir unter Einfluss willkürlich gewählter, von einander unabhängiger elastischer Kräfte X, Y eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung: $x = a \sin \alpha t$, $y = b \sin \beta t$, ausführen lassen, wie dies beispielsweise bei der Darstellung der Lissajou'schen Figuren in der Akustik geschieht.

Würde es uns gelingen die betreffenden elastischen Systeme (Stimmgabeln) derart abzugleichen, dass die beiden Schwingungszahlen mit einander kommensurabel werden, so würde der betreffende Punkt nur eine geschlossene Curve in periodischer Weise zurücklegen, ohne die übrigen Teile der Fläche des Rechteckes ab zu durchstreichen. Kommt aber hiebei mathematische Genauigkeit in Betracht, so würde dies offenbar einen ganz ausnahmsweisen Spezialfall bilden, welchen wir mit menschlichen Hilfsmitteln nie zu erreichen hoffen können, da es unendlich wahrscheinlicher ist, dass sich ein irrationales Verhältnis der Schwingungszahlen einstellt. Im Allgemeinen entsteht also eine ungeschlossene Curve, welche jedem innerhalb des Rechteckes ab gelegenen Punkte beliebig nahe kommt, und zwar findet man leicht, dass die ~~mittlere~~ relative Häufigkeit ~~(Dauer)~~ (gleich der relativen Zeitdauer), mit welcher der schwingende Punkt in einem gewissen, an der Stelle x y gelegenen Flächenelement angetroffen wird, gegeben ist durch:

$$W(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-y^2}}\,dx\,dy$$

und zwar ist dieses Wahrscheinlichkeitsgesetz, wie wir sehen, von der Art der Einstellung der Schwingungszahlen (bzw. der Kräfte X, Y) im Allgemeinen ganz unabhängig.

Bemerkt sei dazu noch, dass durch die obigen Schwingungsgleichungen zu jedem Punkt

der durchlaufenen Fläche eine (bezw. zwei) Fortschreitungsrichtung[en] und eine gewisse Bewegungsgeschwindigkeit zugeordnet ist. Falls nun anstatt eines einzigen, vom Nullpunkt ausgehenden Punktes eine ganze Schar derartiger, aber anfangs willkürlich über jene Fläche verteilter Punkte gemäss jenen Formeln in Bewegung gesetzt wird, so ergeben ganz analoge Überlegungen wie vorher, dass im Allgemeinen nach entsprechend langer Zeit die Spuren der ursprünglichen Anordnung der Punkte verschwinden, und eine von der Art derselben unabhängige Verteilung nach Maßgabe des oben angeführten Wahrscheinlichkeitsgesetzes resultiert.

In ähnlicher Weise ist leicht einzusehen, dass andauerndes Durchrühren zweier in einem Gefäße anfänglich gesonderter Farbstofflösungen im Allgemeinen eine homogene Mischung bewirkt, dass eine Schar von Gasmolekülen, welche in einem geschlossenen Raume ursprünglich beliebig angeordnet wurden, sich im Allgemeinen im Laufe der Zeit über denselben ohne Rücksicht auf die anfängliche Anordnung so verteilen, als ob ihre Lagen ganz zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Volumelemente) wären. Dies rechtfertigt eben die Benützung der üblichen Methoden der kinetischen Gastheorie zur Berechnung solcher Grössen, in denen die Durchschnittswirkung einer grossen Molekülzahl zum Vorschein kommt.

In allen derartigen Fällen sind singuläre Ausnahmsfälle theoretisch möglich, kommen aber wegen ihrer verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit praktisch nicht in Betracht. Wenn wir aber, um diesbezüglichen Einwänden zu begegnen, deren Möglichkeit in der Formulierung unseres vorherigen Satzes (S. 14) berücksichtigen, so müssen wir in demselben das Wörtchen „immer" durch den Ausdruck „im Allgemeinen" – d. h. mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmefälle – ersetzen.

Vielleicht ist aber folgende, etwas präzisere Form vorzuziehen: Für eine Wirkung y, welche von der unvollständig bestimmten Ursache x abhängt, besteht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, wenn die den betreffenden kausalen Zusammenhang darstellende Funktion $y = f(x)$ gewisse Eigentümlichkeiten besitzt, nämlich wenn: 1). *Kleine Änderungen von x* im Allgemeinen *grosse Änderungen von y hervorrufen*, 2) wenn die Menge solcher *Gruppierungen von x Werten, welchen annähernd eine und dieselbe Gruppierung von y Werten entspricht, unermesslich zahlreicher ist als die Menge der x-Gruppierungen, welchen merklich abweichende y-Verteilungen entsprechen.*

Vom mathematischen Standpunkt aus wäre dieser Satz gewiss noch schärfer zu fassen, aber die obige Formulierung dürfte den Grundgedanken, auf welchen es hier ankommt, in genügend verständlicher Weise hervorheben. Dabei möchten wir auf einen Umstand noch ausdrücklich aufmerksam machen, welcher in dem eben Gesagten wie auch in fast allen unseren Beispielen klar zu Tage tritt: dass nämlich vollständige Zufälligkeit und dementsprechende Reinheit der Wahrscheinlichkeitsrelation offenbar einen Idealfall bildet, welcher in Wirklichkeit mit grösserer oder geringerer Annäherung erreicht wird. In den praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist man meist durch eine sehr rohe Annäherung vollkommen befriedigt.

VI.

Noch wichtiger als die mehr formale Frage, die uns im vorigen Abschnitte hauptsächlich beschäftigte, scheint mir die Frage nach der eigentlichen Genese des Zufalls zu sein, welche durch den ersten der beiden daselbst erwähnten Einwände nahegelegt wird, teilweise allerdings auch schon in den betreffenden Beispielen ihre Beantwortung findet. Die zufällige Variabilität der Ursachen, auf welche sich unsere ursprüngliche Erklärung des Gesetzes der grossen Zahlen stützte, ist ohneweiteres verständlich, wenn es sich um Experimente handelt, welche von menschlicher Hand ausgeführt werden; es wird da der Zufall in letzter Linie auf psychologisch-physiologische primäre Ursachen zurückgeführt. Wenn aber der Mensch, sammt seinen unberechenbaren launischen Einfällen, ganz ausgeschaltet wird, wenn man annimmt, dass die einen physikalischen Vorgang bestimmenden Umstände ganz exakt definiert sind, kann da der Begriff der Wahrscheinlichkeit keine Anwendung finden?

Meist wird dies behauptet, während uns die Beispiele der beiden vorhergehenden Abschnitte eines Besseren belehren. Wird eine einzige Kugel in ganz bestimmter Weise auf ein „begrenztes" Galton'sches Brett gesetzt, dessen Stiftreihen ausserordentlich zahlreich sind, und entwirft man eine Statistik der Stellen, wo sie die nacheinanderfolgenden Reihen passiert, so wird man finden, dass alle Werte der Abszissen annähernd gleich häufig vorkommen; sie sind gleich wahrscheinlich, und diese Behauptung bezeichnet hier eine objektive vom Menschen unabhängige Tatsache. Im Beispiele (2) lässt sich der Ort, welchen die in bestimmter Richtung hineingeschleuderte Kugel in einem bestimmten Zeitpunkt einnehmen wird, theoretisch vorausberechnen, falls die Gestalt des Gefässes mathematisch exakt gegeben ist, aber ohneweiters ist ersichtlich, dass

alle Bewegungsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen und dass die Kugel alle Teile des ~~die Stelle, ... aufeinanderfolgenden Reihen passirt, so wird man finden, dass alle ... [illegible] gleich häufig vorkommen, ... [illegible]~~ Gefässes annähernd gleich häufig passiren wird.

Ebenso ist im Beispiele der zusammengesetzten Schwingung (V. Abschn.) die Wahrscheinlichkeit ganz klar definirt als relative Häufigkeit, mit welcher der bewegliche Punkt (innerhalb langer Zeiträume) in einem gewissen Flächengebiete anzutreffen ist, obwohl dabei von einer Variation der die Bewegung bestimmenden Anfangsbedingungen gar nicht die Rede ist.

Es lässt sich nämlich der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit in ganz analoger Weise auf alle solche unvollständig determinirten („zufälligen" im früher dargelegten Sinn) Erscheinungen anwenden, bei welchen dieselbe Art Elementarvorgang sich (eventuell mit variablen „Parameter") im Laufe der Zeit immer wieder wiederholt. Bekanntlich beweist die statistische Mechanik, dass derlei Bewegungs-Vorgänge durchaus nicht selten sind; im Gegenteil, es gehören dazu, laut einem Satze von Poincaré, die Bewegungen aller „endlichen" mechanischen Systeme konservativer Art. Sie sind sämmtlich „quasi periodisch" (in speziellen Fällen exakt periodisch), d. h. dass sich der (beliebige) Anfangszustand im Laufe der Zeit mit beliebiger Annäherung wiederholt. Handelt es sich übrigens um Bewegungen molekularer Systeme, so wird die Häufigkeit gleichartiger Fälle noch durch den Umstand ganz ausserordentlich vermehrt, dass die Individualität ziemlich identischer Moleküle für physikalische Erscheinungen gleichgültig ist.

Um die Gesetze des physikalischen Zufalls und den Begriff der objektiven, vom Menschen vollständig unabhängigen Wahrscheinlichkeit noch klarer zu verstehen, wollen wir schliesslich wir noch einen Vorgang näher betrachten, den man geradezu als den vollkommensten Typus dessen betrachten kann, was „zufällig" genannt wird, d. i. den radioaktiven Atomzerfall. Bekanntlich erleiden die Atome des Radiums im Laufe der Zeit eine Umwandlung, indem sie sich durch explosive Abscheidung je eines α Teilchens in Atome der Emanation ~~übergehen~~ transformiren. Dabei lässt sich aber an den Radium Atomen keinerlei progressive Evolution (nach Art des Alterns der Organismen) wahrnehmen. Wann ein beliebiges, gerade ins Auge gefasstes Atom eine Umwandlung erleidet, das ist absolut zufällig, und ~~die Wahrscheinlichkeit~~ es lässt sich das in keiner Weise weder ~~[illegible]~~ beeinflussen noch voraussehen. Die Wahrscheinlichkeit ~~dass ein Zerfall~~ (dass ein solcher Prozess gerade im Zeitraum dt stattfindet) dafür ist ebenso gross für „junge" wie für „alte" Atome, und lässt sich somit mathematisch durch die einfache Beziehung: $W\,dt = \lambda\,dt$ ausdrücken, wo λ eine absolute Konstante ist, welche ~~sich~~ durch keine uns bekannten Agentien ~~beeinflussen lässt~~ verändert werden kann.

alle Übergangsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen und dass die Kugel alle Orte der

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

[illegible] von Systemen [illegible] mechanisch [illegible]

lässt sich das Ziel erreichen, dass in bestimmter Richtung hineingeschleuderte Kugel in einem bestimmten Zeitpunkte erscheinen wird, theoretisch voraus berechnen, falls die Gestalt der Schachtel mathematisch exakt gegeben ist oder ebenso ist unendlich, dass alle Übergangsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen, und dass die Kugel alle Orte der Schachtel annähernd gleich häufig passieren wird.

Ein komplizierteres Wahrscheinlichkeitsgesetz resultiert beispielsweise, wenn ein Punkt zwei zueinander senkrechte Schwingungen von inkommensurabler Schwingungsdauer ausführt: $x = a \sin \alpha t$, $y = b \sin \beta t$. Derselbe wird in einem unbestimmten Zeitpunkt an irgend einer Stelle des Rechteckes $a\,b$ mit der Wahrscheinlichkeit $W(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi^2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-y^2}}$ anzutreffen sein.

Analog lässt sich der Begriff der objektiven nämlich Wahrscheinlichkeit auf alle solche Erscheinungen anwenden, bei welchen derselbe Elementarvorgang sich im Laufe der Zeit (mit wechselnden Parametern) unzählige Male wiederholt. Bekanntlich beweist die statistische Mechanik, dass durch die Vorgänge derselben nicht erklärt sind; im Gegenteil, es gehören dazu, dass einem Satze von Poincaré, die Bewegungen aller „endlichen" mechanischen Systeme konservativ sind. Handelt es sich übrigens um Bewegungen unendlicher Systeme, so wird die Häufigkeit gleichartiger Fälle noch durch den Umstand außerordentlich vermehrt, dass die Individualität ~~gleichartiger~~ elementar identischer Vorgänge für physikalische Beobachtungen gleichgültig ist.

~~[illegible]~~

Um die Gesetze der physikalischen Zufalls ~~und~~ Ursache zu ~~[illegible]~~ verstehen, wollen wir noch einen Vorgang näher betrachten, den man geradezu als den vollkommensten Typus eines Elementarvorganges des „Zufalls" genannt wird: den radioaktiven Atomzerfall. Bekanntlich erleiden die Atome des Radiums im Laufe der Zeit eine Umwandlung, indem sie, durch explosive Ausschleuderung je eines α-Teilchens in Atome der Emanation ~~[illegible]~~ übergehen. Dabei lässt sich aber an den Radium-Atomen keinerlei progressive Evolution (wie etwa das Altern der Organismen) wahrnehmen. Wenn ein beliebiges, gerade vor kurzem gebildetes Atom eine Umwandlung erleidet, das ist absolut zufällig und ~~[illegible]~~ es lässt sich das in keiner Weise vorher ~~[illegible]~~ vorausbestimmen noch voraussagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür (dass ein solches Atom gerade im Zeitraum dt zerfällt) ~~[illegible]~~ ist ebenso groß für „junge" wie für „alte" Atome, und lässt sich somit mathematisch durch die einfache Beziehung $W\,dt = \lambda\,dt$ ausdrücken, wo λ eine absolute Konstante ist, welche ~~[illegible]~~ durch keine uns bekannten Agentien ~~[illegible]~~ verändert werden kann.

Auf Grund des vorher Gesagten kann man nun ohne weiteres ein Modell des in dieser Erscheinung zum Vorschein kommenden Zufalls geben: das öfters erwähnte Gefäss des IV Abschnittes mit der hineingeschleuderten Kugel. Wir bemerkten schon a.a.O., dass für die Kugel eine unveränderliche Austrittswahrscheinlichkeit besteht, und man braucht nur die Grösse derselben gleich der radioaktiven Umwandlungskonstante zu setzen: $\lambda = \frac{wc}{4V}$. Hätten wir eine grosse Anzahl derartiger Gefässe von gleichem ~~Gestalt~~ Volumen und würden in jedem derselben eine solche Kugel in anderer Richtung in Bewegung gesetzt, so würden die beiden in Rede stehenden Ereignisse — Heraustritt einer Kugel aus einem der Gefässe und Abschleuderung eines α-Teilchens aus einem der Radium-Atome (von gleicher Anzahl) in vollständig analoger Weise vor sich gehen.

Selbstverständlich glaube ich nicht, dass die Radium Atome wirklich einen derartigen Bau besitzen, aber es kommt uns nur auf die prinzipielle Möglichkeit der Konstruktion eines ~~derartigen~~ rein physikalischen Modells des „geregelten" Zufalls an. Sie beweist jedenfalls, dass der scheinbare Widerspruch, welchen die im II Abschnitt aufgeworfene Frage (2) betonte, in Wirklichkeit nicht besteht, und dass der Zufall — in dem in der Physik gebräuchlichen Sinne des Wortes — sehr wohl durch exakt definierte, gesetzmässige Ursachen hervorgebracht werden kann.

Naturgemäss spielt diese Art Zufall die massgebende Rolle in der Welt der Moleküle, und es gibt manche hierhergehörige Erscheinungen, wie z.B. die Brown'sche Molekularbewegung, welche das Wesen ~~der Zufälligkeit~~ derselben in äusserst anschaulicher Weise erkennen lassen. Man könnte vielleicht, um solche Fälle den durch willkürliches Eingreifen eines Organismus verursachten gegenüberzustellen, von „molekularem" und „physiologischem" Zufall sprechen; diese beiden Arten werden sich auch oft zu komplizierteren Zufallserscheinungen verketten.

Wenn beispielsweise ein Draht durch wachsende Spannung, eine Hohlkugel durch inneren Überdruck beansprucht wird, so sagt man, der Ort wo ein Bruch stattfindet, die Form der Bruchstücke, ~~usw.~~ hänge vom Zufall ab. Den wirklichen Grund können kleine Ungleichförmigkeiten der Dicke u. dergl. bilden, welche indirekt auf den physiologischen Zufall bei Herstellung des betreffenden Objektes zurückzuführen sind. Aber auch wenn diese durch genügend grosse Sorgfalt, entsprechende maschinelle Vorrichtungen beliebig klein gemacht sind, bleiben zufällige Ungleichförmigkeiten im Gefüge des Materials, welche vom molekularen Zufall herrühren. Wird beim Gusse der Hohlkugel auch noch so vorsichtig verfahren, es müssen derartige Ungleichförmigkeiten eintreten. Das Erstarren beruht nämlich auf der Bildung von Krystallisationskernen in der unterkühlten Schmelze; die Zahl und Anordnung derselben werden aber ausser von gesetzmässigen Einflüssen (Geschwindigkeit der

Auf Grund des vorher Gesagten kann man [illegible] ein Modell des [illegible] dieser Vorstellung vom [illegible] geben: das [illegible] infolge der [illegible] mit der [illegible] Kugel. Wir bemerkten schon a. a. O., dass die Kugel eine [illegible] wahrscheinlichkeit besitzt und man braucht nur die [illegible] derselben gleich der [illegible] Umwandlungskonstante zu setzen: $\lambda = \frac{hc}{4T}$. Hätten wir eine gerade Anzahl derartiger Zustände [illegible] ~~[illegible]~~ Volumen und [illegible] jeder derselben eine solche Kugel in [illegible] in Bewegung gesetzt, so würden die beiden in [illegible] — Hier tritt eine Kugel aus [illegible] und [illegible] wird [illegible] den Radium-Atome (im gleichen [illegible]) in vollständig analoger Weise vor sich gehen.

Selbstverständlich glaube ich nicht, dass die Radium-Atome wirklich einen derartigen Bau besitzen, aber es kommt nur auf die prinzipielle Möglichkeit der Konstruktion eines ~~[illegible]~~ [illegible] physikalischen Modells des „Zufalls" an. Sie beweist jedenfalls, dass die [illegible], welche die im II. Abschnitt aufgeworfene Frage (2) betrifft, die Wirklichkeit nicht [illegible] und dass der Zufall — [illegible] in der Physik gebräuchlichen Sinne des Wortes — [illegible] nicht [illegible] gesetzmäßige [illegible] hervorgebracht werden kann.

[illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] Zufall [illegible] sich [illegible] physiologischen Zufall [illegible]; [illegible] nicht [illegible] komplizierten [illegible] Erscheinungen [illegible].

[illegible] Druck [illegible] Zufall [illegible] Wahrscheinlichkeit [illegible] Darstellung der [illegible] Zufall [illegible] [illegible] Wahrscheinlichkeit [illegible] Zufall [illegible].

Abkühlung u. dergl.) in ausschlaggebender Weise vom molekularen Zufall bestimmt; der letztere ist somit für die faktisch entstehende mikrokrystallinische Struktur des Stückes verantwortlich, von welcher die Festigkeitseigenschaften abhängen. Dass hier zufällige Molekularkonstellationen so merkbare Folgen nach sich ziehen, beruht nebstbei bemerkt, wieder darauf, dass es sich dabei in letzter Linie um Überschreitungen labiler Gleichgewichts-Zustände handelt.

Auf die weiter sich aufdrängenden Fragen, ob sich alle Zufallserscheinungen auf die obigen zwei Typen zurückführen lassen, und inwiefern vielleicht im Grunde genommen auch der „physiologische" im „molekularen" wurzelt, wollen wir nicht weiter eingehen. Überhaupt sei nochmals wiederholt, dass unsere Studie durchaus nicht eine erschöpfende Analyse aller mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zusammenhängender Probleme geben wollte. Es scheint uns aber ein auch für den Philosophen äusserst wichtiges Ergebnis zu sein, wenn sich auch nur auf einem beschränkten Gebiet — dem der mathematischen Physik — zeigen lässt, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit, in der üblichen Bedeutung eines gesetzmäßigen Häufigkeitswertes zufälliger Ereignisse eine streng objektive Bedeutung besitzt, dass man den Begriff und die Genese des Zufalls genau präzisieren kann, auch wenn man am ~~Prinzip des~~ Determinismus festhält, und dass sich dabei das Gesetz der grossen Zahlen nicht als ein mystisches Prinzip und nicht als rein empirischer Erfahrungssatz, sondern als ganz einfache mathematische Folge der speziellen Form ergibt, welche in derlei Fällen den kausalen Zusammenhang darstellt.

Vielleicht ist es nicht überflüssig schliesslich noch zu bemerken, dass im Sinne dieser Auffassungsweise (der Wahrscheinlichkeitsrechnung) natürlich nicht der Wert eines von den sonstigen Naturerkenntnissen unabhängigen, neuen Forschungsprinzipes zukommt, da sie ja nur eine vereinfachende, statistische Schematisierung gewisser in der Natur sehr häufig auftretender funktioneller Zusammenhänge bildet, deren exakte Untersuchung infolge grosser Kompliziertheit sehr erschwert ist. Bei der charakteristischen Entwickelung der heutigen Physik im Sinne einer Auflösung der physikalischen Erscheinungen in „verborgene" Teilereignisse spielen Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit eine wichtige Rolle als anschauliche, abkürzende Hilfsbegriffe, könnten aber zur Not auch vollständig entbehrt werden, indem sich jene schematisierenden Methoden durch exakt statistische Berechnungen vertreten lassen sollten.*) ~~Unsere Darlegungen~~ Die hier skizzierte Theorie macht uns allerdings auch den Grund begreiflich, warum die Anwendung jener Begriffe unter Verschleierung der Details der funktionellen Zusammenhänge doch hinreichend genaue Endergebnisse zu liefern pflegt, und wir verstehen, dass sie namentlich im Gebiet solcher empirischer Wissenschaften, wo eine exakte mathematische ~~Darstellung~~ Untersuchung der Teilereignisse ausgeschlossen ist, ein unschätzbares Hilfsmittel bildet.

*) Darin besteht wohl der wesentliche Unterschied zwischen der kinetischen Gastheorie (Maxwell, Boltzmann u. A.) und der statistischen Mechanik (Gibbs), dass sich erstere auf gewisse, ~~allerdings~~ zwar recht plausible aber nicht exakt bewiesene Zufalls- und Wahrscheinlichkeits-Ideen stützt, während letztere (wenigstens im Programm, wenn auch nicht ganz in der Durchführung) unter Vermeidung derselben auf exakt statistische Methoden aufgebaut ist.

Wydrukowane

w

Naturwissenschaften

1918 – Heft 17

XXIX

Über den Begriff des Zufalls und der objektiven Wahrscheinlichkeit in der Physik.

Infolge des in den letzten zwei Jahrzehnten immer

Der innerhalb des letzten Jahrzehnts allgemein anerkannte Sieg der kinetisch atomistischen Vorstellungsweise äussert sich in der Physik in der Tendenz, sämmtliche Gesetze der ganzen Physik* auf statistische zurückzuführen, so wie es in einem beschränkten Gebiete die kinetische Gastheorie betreffs der Gasgesetze tat. Hiermit hat heute in der theoretischen Physik die Wahrscheinlichkeitsrechnung die als Forschungsmethode unbestritten die erste Rolle übernommen.

Doch ist diese kolossale Ausdehnung des Anwendungsgebietes der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht von einer entsprechenden logischen Analyse der Grundlagen begleitet gewesen; man hat sich wenig Mühe gegeben die Bedingungen zu präzisieren, von denen die Anwendbarkeit der W. R. abhängt und verlassen sich dabei meist auf ein instinktives Wahrscheinlichkeitsgefühl, welches zu der in der Wissenschaft sonst geforderten Exaktheit nicht recht passt.

Als kleiner Beitrag zu diesem Thema eine Anregung zu weiteren Untersuchungen der Mathematiker mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefasst sein, welche nicht eine endgiltige Aufklärung sondern bezwecken

möchte ich im Folgenden einige Gedanken wiedergeben, die ich mir darüber gebildet habe, wobei ich natürlich nicht im Sinne habe dieses ganze Problem (endgiltig aufzuklären sondern eine Anregung zu Mathematiker zu weitergehenden Untersuchungen geben möchte.

*Wie ich im Vorhinein bemerken möchte, berühren sich diese Bemerkungen vielfach mit Poincaré's Ausführungen**) die überhaupt das Wichtigste bilden, was über diesen Gegenstand bisher gesagt wurde.

~~Vielfach wurden schon die Fragen aufgeworfen: Wenn man den Zufall als~~

Die Frage, auf welche Phänomene sich das Geltungsbereich der WR bezieht, wird wohl allgemein dahin beantwortet: auf diejenigen deren Eintritt vom Zufall abhängt. Die Untersuchung dieses letzteren Begriffes ist also jedenfalls das Primäre. Damit hängen die oft aufgeworfenen Fragen zusammen: Ist der Zufall etwas Gesetzlos Wirkendes, wenn man darunter versteht

Die Einführung des Zufalls in die theoret. Physik [illegible] Widerspruch [illegible] im Zweifachen

Wie kann der Zufall in der rein deterministischen Spekulationen der theoretischen Physik eine Rolle spielen?

Wie ist möglich dass derselbe der gesetzlose Zufall genaue definierten und die Wahrscheinlichkeitsregeln befolgt?

Die Widersprüche stellt man allerdings meist in der Weise dar man zwar den gesetzmässigen Kausalen Zusammenhang von Ursache und Wirkung eingesteht, und als Zufall die uns unbekannten und infolge mannigfaltiger Komplikation nicht erkennbaren Teilursachen bezeichnet. Hiermit wird der erste Widerspruch behoben. Auch dann bleibt aber die zweite Frage ungelöst, wieso eine Berechnung der Wirkungen von unbekannten Teilursachen überhaupt möglich ist.

Die Heute Wissenschaft [illegible] prinzipiell nur den Determinismus.

Die mannigfaltigen philosophischen Analysen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs geben darüber gar keinen Aufschluss. Überhaupt handelt es sich den Philosophen dabei meist um etwas ganz anderes als den Physikern. So entwickelt Zukasiewicz in seiner log. Grundlagen d. W. R. die Wahrsch. Theorie auf der Grundlage der Anschauung, dass man nur von der Wahrscheinlichkeit unbestimmter Aussagen (nicht aber von der W. möglicher Ereignisse) sprechen kann und führt den Wahrscheinlichkeitsgrad einer solchen Aussage auf ihren „Wahrheitswert" zurück, welch letzterer in analoger Weise definiert wird wie die üblichen Wahrscheinlichkeitsbrüche. Indem so die Wahrscheinlichkeitsaussage in natürlicher Weise neben die wahren und falschen Aussagen angewendet wurde, wird in der formellen Darstellung der Logik wohl ein Fortschritt erzielt, doch wird die Frage betreffs der Art der jenen Aussagen zu Grunde liegenden objektiven Tatsachen gar nicht berührt.

Sie gebraucht also jenen so vieldeutigen Begriff (wie Meinong treffend bemerkt) in einem sehr eingeschränkten Sinne, welchem die Philosophen wie Meinong vielleicht lieber den Terminus Möglichkeitsgrad beilegen werden – doch) Es verhält sich damit wird derselbe eben erst in [illegible] beschränkter Form einer exakt mathematischen Behandlung zugänglich ähnlich wie mit vielen anderen Ausdrücken, wie z. B. Kraft, Arbeit, Energie, Wärme usw., welche der Physiker in wesentlich anderem Sinne versteht als dies im gewöhnlichen Leben üblich ist.

Ich bin mir wohl bewusst, dass dies im Gegensatz zu der traditionellen allgemein üblichen Auffassung steht welche (die Begriffe d. Zufalls u. d. Wahrscheinlichkeit) (auch Poincaré p. 31) Unkenntnis (einer Teilweisen) (der Ursachen) als wesentliches Kennzeichen ansieht, darum sei als Belege für meine Behauptung bemerkt:

sagt doch z. B. Poincaré: Ein allwissender Gott würde für uns begrenzt denkende Menschen ...

Wir pflegen nun die Vertreter der herkömmlichen Auffassung die Tatsache zu erklären, dass eine Berechnung der Wirkung unbekannter Teilursachen möglich ist? Sie berufen sich auf das „Gesetz der großen Zahlen" als eine zwar nicht beweisbare aber (empirisch) unumstößlich erwiesenes Prinzip. So sagt z. B. Timerding p. 162: „... die unverbrüchliche Kausalität in allen Naturgeschehen mag wohl aufrecht erhalten werden, sie reicht aber nicht hin um die Regelmäßigkeit des Weltgeschehens vollständig zu erklären. Es gehört vielmehr die Tatsache hinzu, die wir als Gesetz d. großen Zahl bezeichnen und die bewirkt, dass die Unregelmäßigkeiten die sonst durch die zufälligen Ereignisse in die Welt hineingetragen würden, in dem Gesamtergebnis wieder verschwinden. ... Unser Verstand sträubt sich allerdings dagegen, ein solches Prinzip nur deshalb anzunehmen, weil hier und dort seine Richtigkeit bezeugt wird, vielmehr drängt er dahin auch einen inneren Grund für einen solchen Ausgleich zu finden. Ein solcher innerer Grund lässt sich aber nicht ermitteln. ..."

Das ist wohl eine wenig erfreuliche Lösung und man wird trachten, einen andern Ausweg aus dem Dilemma zu finden.

Poincaré hat bemerkt, dass es auch in der abstrakten Mathematik einen Zufall gibt, dass z. B. die Häufigkeit der Zahlen 1, 2, 3 .. an der letzten Stelle der Zahlen in Kolonnen einer Logarithmentafel dem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsgesetze folgt. Wird sich der Mathematiker damit begnügen hierin eine unbegreifliche Gesetzmäßigkeit anzuerkennen? Sollte der Zufall in der Physik

Nebenbei bemerkt Eigentlich setzt sich in diesem Falle die Ursache aus zwei Variablen zusammen: wenn man sich den Schwerpunkt O und die drei in der Ecke E zusammentretenden Kanten auf die Horizontalebene projiziert, sieht man dass (in der so erhaltenen Projektion) die Entfernung OE für die Geschwindigkeit maßgebend ist, mit welcher das Umfallen erfolgt, die Richtung des Vektors OE aber bezug auf die Kantenlinie für die Zahl, welche (unten oder obenauf) zu liegen kommt.

III

*)

Ein Fingerzeig scheint mir darin zu liegen dass die oben erwähnten Definitionen des Zufalls als unbekannter Teilursachen u. dergl. zweifellos viel zu weit zu sein. Als Leverrier bemerkte, dass die Bewegung des Uranus nicht genau mit der Vorausberechnung übereinstimme, sagte er nicht: das ist Zufall! – Wir haben keine Ahnung, wann eine magnetische Störung stattfinden wird, halten das Eintreten derselben doch durchaus nicht für eine Sache des Zufalls. Es fehlt in diesen Beispielen ein ganz wesentliches Merkmal desjenigen, was man

*) Czuber sagt „unbekannte und wechselnde Umstände". Es ist wohl nicht recht klar, was mit „wechselnd" gemeint ist herausfühlen soll und wie der Wechsel erkannt wird, wenn der Umstand selber unbekannt ist. Vielleicht ist das aber eine instinktive Vorahnung der Kriterien, die wir später besprechen werden.

*) [Dieser populäre Zufallsbegriff ~~eignet sich~~ genügt jedoch nicht als Grundlage eines exakt definierbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Von einem mathematischen Wahrscheinlichkeitsgesetz kann betreffs einer Grösse y erst dann gesprochen werden, ~~wenn 1). dieselbe von einer oder mehreren zufälligen Ursachen x abhängt, 2).~~ wenn die Kausal-Relation $y = f(x)$ sich (ausserdem noch) durch eine spezielle Eigentümlichkeit auszeichnet, nämlich wenn die Verteilung ~~[illegible]~~ der y, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, unabhängig wird von der Art der Verteilungsfunction $\varphi(x)$, welche die Wahrscheinlichkeit der x bestimmt — vorausgesetzt, dass letztere einen regelmässigen Verlauf habe.

Eine hierzu hinreichende Bedingung ist eine solche Beschaffenheit der Function $y = f(x)$, dass sich für jeden innerhalb des Schwankungsbereiches Ω gelegenen x_0-Wert ein solches, im Verhältnis zu Ω äusserst kleines Δx angeben lässt, dass die Function $y = f(x_0 + \varepsilon \Delta x)$ sämmtliche y Werte (innerhalb gewisser Grenzen) durchläuft, sobald die Variable ~~[illegible]~~ ε die Werte von 0 bis 1 durchläuft. Für jedes x gibt es dann ~~also~~ einen kleinsten Bereich Δx, welchem eine Variation über alle Werte y entspricht. Die Grössen Δx, (welche mit der Grösse zusammenhängen, die wir früher Ausgleichsgebiet genannt haben) definieren gewissermassen die Struktur der Wahrscheinlichkeitsfunction $f(x)$; je „feinkörniger" dieselbe ist, d. h. je kleiner diese Δx sind, desto geringer sind die Anforderungen, die man betreffs der Gleichförmigkeit der primären Verteilungsfunction φ stellen muss, um ein von der Art derselben unabhängiges Resultat zu erhalten.

*) Siehe z. B. E. Borel, Le Hasard p. 15, Alcan Paris 1914.

(4) 23 12

Im Gegensatz hiezu interessiert sich die exakte Naturwissenschaft nicht für Aussagen und nicht für (berechtigte oder unberechtigte) subjektive Vermutungen, sondern für die objektive Wahrscheinlichkeit, d. i. für die relative Häufigkeit des Eintretens bestimmter Ereignisse. Aus diesem Grunde nimmt die theoretische Physik [illegible] und, soweit die Anwendung in der theoretischen Physik in Betracht kommt, alle W. Th. von vornherein als ungenügend zu betrachten, welche den Zufall also „unbekannte Teilursache" auffasste. Die physikalische Wahrsch. eines Ereignisses kann nur von den Bedingungen abhängen, welche sein Zustandekommen beeinflussen, aber nicht von dem Grade unseres Wissens. [illegible]

Die Wahrsch. Rechnung der kinetischen Gastheorie würde ihre Berechtigung auch dann behalten, wenn wir die Beschaffenheit der Moleküle, deren Anfangslagen absolut ganz genau kennen würden und im Stande wären, deren Bewegung mathematisch exakt für alle Zeit zu verfolgen. Sie wäre dann noch immer ein ebenso rationelles mathematisches Hilfsmittel wie die abgekürzte Multiplikation oder die Benützung vierstelliger Logarithmentafeln neben der älteren „exacten" Multiplication.

[illegible] ein einzutreffender Definition des Zufalls zu finden [illegible] in gewöhnlichem Leben oder in unserer Wissenschaft als zufällig bezeichnet, und zwar lässt sich dieses kurz in die Worte fassen: Kleine Ursache, — große Wirkung! (Ein geringer Unterschied im Gegengewicht der Roulette — Gewinn oder Verlust einer [illegible] Geldes.) Poincaré gibt zwar noch zwei Alternativmerkmale des Zufalls an: Komplexität vieler mitwirkender Ursachen oder gegenseitige Einwirkung zweier für gewöhnlich in unabhängigen Erscheinungsgebieten, welcher hierauf [illegible], doch glaube ich, dass sämmtliche derartige dazugehörigen Fälle sich bei genauer Analyse ebenfalls unter jenes Gesichtspunkt einordnen lassen.

Besonders charakteristisch tritt jenes Merkmal in allen Fällen auf, wo es sich um einen Zustand labilen Gleichgewichts handelt. Denken wir uns einen idealen Würfel auf eine Ecke gestellt, so ist die kleinste Verschiebung des Schwerpunktes aus der Vertikalen schon dafür entscheidend, auf welche der drei unten zusammenstoßenden Flächen der Würfel zu liegen kommen wird, [illegible] hängt vom Zufall ab.

Nun entzieht sich aber auch ein derartiger Zufall jeder exakten Berechnung und kann auch niemals die Grundlage zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden. Den Ausschlag des Effektes kann man da absolut nichts voraussagen, solange man die kleinste Ursache nicht mit genügender Genauigkeit kennt. Kennt man sie aber, so ist der Effekt mit Gewissheit vorauszusehen und es bleibt kein Raum für Wahrscheinlichkeit übrig.

Mathematisch ausgedrückt, hängt die Wirkung y (die Wirkung auf der Fläche b. Zahl) von der Ursache x (der Lage d. Schwerpunkts) derart ab, dass die Funktion $y = f(x)$ in dem betrachteten Werte x_0 eine Singularität, Unstetigkeit aufweist.

Der einer Wahrscheinlichkeitsberechnung entsprechende Zufall zeichnet sich durch ein weiteres wesentliches Charakteristikon aus: eine durchschnittliche Regelmäßigkeit des Effektes (unabhängig von der Größe d. Ursache)

Lässt man jenen Würfel in der vorher besprochenen Lage aus der Höhe eines Meters auf eine ideal ebene elastische Unterlage fallen, so ändert sich der physikalische Vorgang in wesentlicher Weise. Der Würfel prallt ab, steigt empor und verdreht diese Bewegung mehrmals mit abnehmender Amplitude und unter Annahme unregelmäßiger Rotationsbewegungen, bis er auf irgend einer seiner sechs Seiten liegen bleibt. Auf welche er schließlich zu liegen kommt, muss natürlich von der unmerklich geringfügigen Abweichung aus der betrachteten Anfangslage d. i. von der exakten Stellung abhängen, aber die Funktion, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, wird so beschaffen sein, dass

bei kontinuierlicher Veränderung der zwei die Anfangslage definierenden Variablen x, φ

in raschem Wechsel Gebiete durchschritten werden, welche allen möglichen Endlagen, d. i. entsprechenden Ey., und zwar so dass bereits innerhalb

Zu der Ey. würde man sich also die Felder abwechselnd mit den Zahlen 1 – 6 bedeckt denken.

① 2

Die Wahrsch. R., welche seit Beginn ihrer Entwicklung mit unbestreitbarem Erfolg hauptsächlich auf dem Gebiet sozialer und biologischer vorzugsweise Vorgänge angewendet wurde, (sonst der Mathematik wenig zugänglichen) hat sich in den letzten Zeiten ein neues überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauss' Zeiten als eigene Disziplin entwickelte Theorie der Hilfsfehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche System der theoretischen Physik, (seit dem diese Wissenschaft das [illegible]). Zum ersten Mal von Clausius und Maxwell (um 1860) als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, hat (die W.R.) nach einer Periode der vorübergehenden Stagnation infolge des modernen Siegeszuges der statistischen und deutlichen modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie eine grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet heute das unentbehrliche Werkzeug der jetzt [illegible] Forschungsmethode, welche auf dem Gebiete der Physik zur Herrschaft zum Durchbruch gelangten eine führende Rolle spielt. Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute herrschenden Tendenz, sämtliche Gesetze der Physik* auf Statistik verborgener Elementarereignisse zurückzuführen, in ähnlicher Weise wie es die kinetische Gastheorie (auf einem beschränkten Gebiete,) betreffs der Gasgesetze schon lange tut.

Trotz dieser enormen Ausdehnung d. Anwendungsbereiches d. Wahrsch. R. hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte gemacht; 1 es gilt wohl noch heute der Satz, dass keine weitere mathematische Disziplin auf so unklare und schwankende Grundlagen aufgebaut ist. Die Grund-Fragen nach der Subjektivität oder Objektivität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes (nach der Definition der Zufälligkeit u.s.w.) sind von verschiedenen Autoren in ganz diametral verschiedener Weise beantwortet.

Insbesondere ist auch eine allgemeine und mathematische Präzisierung der für die Anwendbarkeit dieser Rechnungsmethode charakteristischen Bedingungen noch immer ausständig, und man pflegt sich in dieser Hinsicht meist auf ein intuitives Wahrscheinlichkeitsgefühl zu verlassen.

Als kleiner Beitrag zu derartigen Untersuchungen mögen die nachfolgenden Bemerkungen aufgefasst sein, welche von der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ausgehen, in der gerade grundsätzliche Schwierigkeiten in besonders krasser Form auftreten. Ich will eingestehen, dass gerade keineswegs eine allseitige und endgiltige Aufklärung des ganzen damit zusammenhängenden komplexes philosophischer Fragen bezweckt, sondern nur einige Leitgedanken hervorgehoben werden soll, welche mir die objektive Seite des Wahrscheinlichkeitsbegriffes meist unumschränkt einigermaßen in recht. [illegible] zu klären scheinen. *)

Das Unbefriedigende der diesbezüglichen Ausführungen in gewissen sonst höchst beachtenswerten neueren Werken hat die Verfassung Entstehung dieser Studie veranlasst, welche im Übrigen

---

Indem (ohne von Zufall zu sprechen) Czuber definiert: d. Wahrscheinlichkeitsgrad (= Wahrscheinlichkeitsgrad) ist das Verhältnis der Anzahl derjenigen Werte der Variablen welche der Aussage entsprechen zur Anzahl aller Werte der Variabeln" entwickelt er übrigens meiner Ansicht nach die Grundbegriffe der Statistik, aber nicht der Wahrscheinlichkeits-Rechn. im eigentlichen Sinne. Allerdings ist die mathematische Behandlungsweise beider (die gleiche und vielleicht kann letztere als Spezialfall der ersten aufgefasst werden, doch nicht umgekehrt; man kann wohl nicht sagen: Die Wahrscheinlichkeit dass ein Monat 31 Tage hat, beträgt $\frac{7}{12}$ oder: Die Wahrscheinlichkeit dass ein Planet innerhalb der Erdbahn läuft eine kleinere Entfernung ist $\frac{2}{8}$ (abgesehen von d. Asteroiden). Die Wahrscheinlichkeit dass einer der Soldaten Kämpfer zu Waterloo der englischen Nation angehört war ... . Es fehlt hier das Element des Zufalls welches uns allein berechtigt von Wahrscheinlichkeit zu sprechen, und darauf kommt es in unserem Falle gerade an.

Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik.

von

M. v. Smoluchowski

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche seit Beginn ihrer Entwickelung mit grösstem Erfolg hauptsächlich in ~~auf~~ dem sonst der mathematischen Behandlung wenig zugänglichen Bereich sozialer und biologischer Vorgänge angewendet wurde, hat sich in den letzten Zeiten ein überaus wichtiges Anwendungsgebiet erobert: die Physik. Und zwar ist damit nicht etwa die seit Gauss' Zeiten als eigene Hilfs-Disziplin ausgebildete Theorie der Fehlerausgleichung bei physikalischen Messungen gemeint, sondern gerade das eigentliche Gerüst dieser Wissenschaft, das System der theoretischen ~~mathematischen~~ Physik. Zum ersten Male um 1860 von Clausius und Maxwell als eigenartiges mathematisches Hilfsmittel in die kinetische Gastheorie eingeführt, ist ~~hat~~ die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach einer ~~v~~ vorübergehenden Periode der Stagnation [infolge des schliesslichen Sieges der atomistischen Anschauungsweise eine für die Physik ganz grundlegende Bedeutung gewonnen und bildet] heute zu einem ganz ~~das~~ unentbehrlichen Werkzeug bei Forschungen auf dem Gebiete der modernen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie geworden. ~~[illegible]~~ Entspricht doch ihr Wesen durchaus der heute zur Herrschaft ~~[illegible] zum Durchbruch~~ gelangten Tendenz, sämmtliche Gesetze der Physik*) — nach dem Vorbild der kinetischen Gastheorie — auf Statistik verborgener Elementarereignisse zurückzuführen, wobei die „Einfachheit" derselben als sekundäre Folge des Wahrscheinlichkeitsgesetzes „der grossen Zahlen" aufgefasst wird. ~~in ähnlicher Weise wie es die kinetische Theorie auf einem beschränkten Gebiete, betreffs der Gasgesetze schon lange tut~~.

Trotz dieser enormen Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeits-Rechnung hat die exakte Analyse der ihr zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte

*) Von dieser Tendenz sind bisher nur die Lorentz'schen Gleichungen der Elektronentheorie, ~~und [illegible]~~ das Energiegesetz und Relativitätsprinzip unberührt geblieben, aber es ist wohl möglich, dass im Laufe der Zeit auch hier statistische Regelmässigkeit an Stelle exakter Gesetzesform treten dürfte.

II

Die Frage, welche Ereignisse in den Geltungsbereich der W.-R. fallen, wird wohl allgemein dahin beantwortet: auf diejenigen deren Eintritt vom Zufall abhängt. Die Untersuchung d. letzteren Begriffs ist also jedenfalls das Primäre, und wir werden uns vor Allem klar zumachen suchen, wodurch die Natur des „Zufalls" charakterisiert wird / was als Zufall bezeichnet wird. Damit hängen zwei Fragen zusammen, deren Schwierigkeit sich insbesondere in den exakten mathematischen Spekulationen der theoretischen Physik besonders fühlbar macht, nämlich die Frage: Wie ist es möglich, dass sich der Effekt des Zufalls berechnen lässt, dass also zufällige Ursachen gesetzmäßige Wirkungen haben? und die ebenso beunruhigende Gegenfrage: Wie kann der Zufall entstehen, wenn alles Geschehen nur auf regelmäßige Naturgesetze zurückzuführen ist? oder mit anderen Worten: Wie können regelmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmäßigen, so sind diese Widersprüche gewiss vollständig unüberbrückbar. Ein solcher Zufallsbegriff ist jedoch mit dem in der heutigen Wissenschaft herrschenden Determinismus unvereinbar. Meist pflegt man sich also die Sache durch die Annahme zu erklären, dass zwischen der betreffenden Ursache und Wirkung ein gesetzmäßiger kausaler Zusammenhang besteht, dass aber dessen Art uns wegen der Kompliziertheit der Erscheinung nicht erkennbar ist, wodurch der Schein der Gesetzlosigkeit entsteht. In diesem Sinne wäre der Zufall als eine uns unbekannte Teilursache zu bezeichnen. Vielleicht ist damit auch Meinongs Auffassungsweise näher verwandt als es den Anschein hat, derzufolge Zufälligkeit die „Tatsächlichkeit von etwas Nicht-Notwendigem" bedeuten würde; dabei soll nämlich die negierte Notwendigkeit entweder eine innere oder äussere (relativ zu einem Komplex von Objektiven) sein. Wenn man nun vom deterministischen Standpunkt aus Ursache und Wirkung als immer durch notwendige Teilereignisse verkettet ansieht, kann von Nichtnotwendigkeit nur in relativem Sinne die Rede sein: insofern die Notwendigkeit uns selbst nicht erkennbar ist.

Diese herkömmliche Darstellungsweise könnte man allenfalls noch als Beantwortung der zweiten der oben angeführten Fragen gelten lassen, aber es bleibt die erste Frage ungelöst, wieso eine Berechnung der Wirkungen bei unerkennbaren Teilursachen möglich ist.

Die mannigfaltigen philosoph. Analysen d. W.begriffs geben hierüber keinen Aufschluss. Überhaupt handelt es sich dem Philosophen dabei meist um etwas ganz anderes als dem Physiker (und Mathematiker). Er richtet seine Aufmerksamkeit vor Allem auf die subjektiven, psychologischen Momente des Wahrscheinlichkeitsgedankens, analysiert die erkenntnistheoretische Bedeutung desselben, untersucht in welcher Weise sich Wahrscheinlichkeitsaussagen neben wahren und falschen Aussagen in das System der formalen Logik einordnen lassen, pflegt aber die Frage nach der Art der denselben zu Grunde liegenden objektiven Tatsachen nicht näher zu berühren.

26 17

Von einer (mathematischen) Wahrscheinlichkeits (Gesetz) der (von Zufall [illegible]) Grösse y kann erst dann gesprochen werden

dass innerhalb des „Variabilitätsbereiches" von x

die Wahrscheinlichkeitsverteilung von y (unabhängig wird von der Wahrscheinlichkeit[illegible] des x bestimmt (wenigstens innerhalb gewisser Grenzen (annähernd)) – vorausgesetzt dass letztere einen sozusagen regelmässigen Verlauf habe – Art der Function $\varphi(x)$ welche die

Eine hinreichende Bedingung ist die nachfolgende:

wenn innerhalb des Variabilitätsbereiches von x kein zusammenhängendes endliches Gebiet existirt, in welchem nicht für jeden Wert y (innerhalb eines gewissen Bereiches) eine Menge (diskreter) dazugehöriger x Werte vorhanden ist. x_1, x_2 x_3 x_4

Letzteres ist natürlich nur dann möglich falls welche

für jeden Abschnitt $x \dots x+\Delta x$ (wobei Δx als klein im Verhältnis zum ganzen Variabilitätsbereich von x vorausgesetzt wird)

$$y + \varepsilon\Delta y = f(x + \vartheta\Delta x)$$

so dass für jedes, bei festgehaltenen x und Δx, ϑ die Werte von 0 bis 1 durchläuft, y alle Werte zwischen gewissen Grenzen (bei genügend kleinem ε < 1)

y_1 und y_2 annimmt

Natürlich ist dann im Allgemeinen umgekehrt jeder Wert y durch eine Menge verschiedener x realisierbar, die selbe Wirkung kann durch sehr verschiedene Ursachen hervorgebracht werden

Wahrscheinlichkeitszusammenhang [illegible] also ist die inversen Function in hohem Grade vieldeutig:

Derartige Functionen sind leicht aufstellbar z.B.

$y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für genügend kleine Werte α. Es resultirt hier die Wahrscheinlichkeits-Verteilung $W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

Als typische Fälle wie Theoretisch interessant ist die physikalische Verwirklichung jener Bedingung namentlich in folgenden zwei Fällen hervorzuheben:

I). Das Galton'sche Brett

Das Einzelereignis ist also nicht vorauszusehen, wohl aber die Gesamtverteilung der Ereignisse bei fortgesetzter Wiederholung.
~~Dort~~ Ein solcher Zufall eignet sich zur Deutung.

Andererseits muss man aber zugestehen, dass ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ das eigentliche Wesen des Zufalls dadurch noch nicht erschöpfend dargestellt wird, denn ~~[illegible]~~ (meine Überlegung) beruht ~~[illegible]~~ auf der Annahme einer primären Verteilungsfunktion φ für die zufälligen Fehler der Ursache, von der überdies ein „regelmäßiger Verlauf vorausgesetzt wird.

Solange die Scheibe und der Schütze still steht, kann von Zufall keine Rede sein (vorausgesetzt

Der Ausdruck Zufall wird zur Bezeichnung einer ~~[illegible]~~ speziellen Art von Kausal-Relationen gebraucht.

(5) V 27 3

eines äusserst kleinen Variabilitätsbereiches der Anfangsstellung (in Bezug auf die Lotrechte), die den Zahlen 1–6 entsprechenden Bereiche ungefähr flächengleich sind. Würde man den Würfel (vor dem Fallenlassen) durch experimentelle menschliche Hilfsmittel in irgend einer Weise zu (nun versuchen) orientieren, so ist klar, dass trotz grösster Sorgfalt (dabei gewisse Einstellungsfehler unvermeidlich sind. Den Bereich dieser unvermeidlichen Fehler wollen wir als) eingegrenzten Variabilitätsbereich Ω bezeichnen, und man darf wohl annehmen, dass die Function (Verteilungs-) welche die Häufigkeit jener Fehler bei unzähligen Wiederholung des Versuches darstellt, einen regelmässigen „rhythmischen" Charakter besitzt. Ist dann der Bereich der klein im Vergleich zum unvermeidlichen Variabilitätsbereich Ω, so (ist leicht einzusehen dass) die schliesslich resultierende Wahrscheinlichkeit für alle W. Zahlen 1–6 gleich sein, unabhängig von der speziellen Art der (bei der dortigen Einstellung und von der individuellen) Variationsfunction φ. ~~Der Effekt des Zufalls wird durch … Das Ereignis hat den Charakter des Zufälligen und doch ist die mathematisch berechenbar.~~

Somit sehen wir

~~Allerdings muss bemerkt werden, dass die Überlegung das Wesen des Zufalls nicht auf, denn sie …~~ (für die Wirkung des Zufalls) wie ein bestimmtes Gesetz resultieren kann, ohne Rücksicht auf die spezielle Form jener (unbekannten) primären (Verteilungsfunction φ) (Es kann sogar die Form der Function φ mit der Zeit veränderlich sein!) (womit der erste der eingangs aufgeworfenen Widersprüche seine Aufklärung findet)

Dieser Umstand findet seinen Ausdruck in der (treffenden) Aussage (*) Sieh Borel p. 15) mit welcher sich … liebe: Aufgabe der W. theorie (ist nicht) die Erklärung der W. eines Ereignisses (dasselbe vermittelnden (oder dadurch bedingten)), sondern die Ermittlung derselben auf Grundlage der als bekannt angenommenen W. einfacherer (eines damit zusammenhängenden) Ereignisses. ~~Der zweite … Umstand erklärt wie der Effekt des Zufalls einer mathematischen Berechnung zugänglich sein kann und klärt die eingangs aufgeworfenen Widersprüche auf.~~

Einfacher als der obige Fall ist das Beispiel der Roulette, an welchem Poincaré (C. d. Pr. p.) analoge Betrachtungen anstellt); am besten scheint es mir dasselbe in folgender Weise zu formulieren oder das Beispiel der rotierenden Sectoren-Scheibe. Ob Geschosse einen schwarzen oder weissen Sektor treffen und hängt vom Zeitpunkt ab wann das … (festsitzende Gewehr losgedrückt wird). … so dass die Treffsicherheit des Schützen ausgeschaltet wird … einem Schützen als Ziel dienenden … Scheibe in so Rotation versetzt dann so wird die Wahrscheinlichkeit einen weissen oder schwarzen Sektor zu treffen nur vom Flächeninhalt derselben abhängen.

Mag er sich in einem beliebigen Zeitpunkt entschliessen losdrücken, aber vom Entschluss bis zur Tat vergeht (jedenfalls) eine unbestimmte in gewissen Grenzen variable Zeit, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuss zur Zeit t losgeht, durch eine (im Bereich von t bis t+τ von Null merklich verschiedene) Function φ(t) dargestellt wird, von der man annehmen darf, dass sie keine Unstetigkeiten, oder unendlich viele Maxima und Minima aufweist, deren Form aber sonst gleichgültig ist. Entfallen auf den Variabilitätsbereich der Zeit τ genügend viele Rotationen der Scheibe, so wird die Form der Function φ ganz gleichgültig und

Man sieht dann nur kurz von jener Schwierigkeit ab, ohne Rücksicht auf φ, aber implizite wird betreffs φ doch jene Annahme gemacht. Jede weitere Überlegung würde ganz gegenstandslos werden (falls das Gewehr mittels elektrischen Kontaktes mit der Sektoren Scheibe in passender Weise verbunden wäre

Fassen wir das (bisher) Gesagte in verallgemeinerter Form zusammen:

Man sagt (dass ein Ereignis vom Zufall abhängt, wenn es eine solche Function einer (eventuell unbekannten oder absichtlich ignorierten) Ursache oder Teilbedingung x ist, dass das Eintreten oder Nichteintreten desselben (von einer sehr kleinen Änderung des x abhängt, [wobei unter „klein" verstanden wird: klein im Verhältnis zum Variabilitätsbereich von x]

(Magnetische Störung?)

b) Dieser populäre Begriff des Zufalls ~~ist jedoch zu weit~~ eignet sich jedoch noch nicht als Grundlage eines bestimmten exakt definierbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffs.

~~In diesem Sinne ist also~~

~~Da also eine~~ Größe ~~ein Wahrscheinlichkeitsgesetz~~ sowohl befolgt ~~insofern als~~ (1). ist von einer oder mehreren zufälligen Ursachen abhängig 2). wenn die Kausal-Relation Funktion $y = f(x)$ ist durch eine spezielle Eigentümlichkeit ausgezeichnet, nämlich wenn

Eine kleine hinreichende Bedingung ist eine solche Beschaffenheit der Funktion $y = f(x)$, dass für jedes innerhalb des Variabilitätsbereiches V gelegenen x_0 Wert und für jedes beliebige y (innerhalb gewisser Grenzen $y_1\ y_2$) ein Wert Δx (im Verhältnis zu V äusserst klein) existiert, für welchen die Relation $y = f(x_0 + \Delta x)$ gilt. Wenn also x alle Werte innerhalb V durchläuft, ... das zugehörige y

Die Größe (der Bereich) Δx ... Für jedes x gibt es also einen kleinsten Bereich Δx, welchem eine Variation über alle Werte y entspricht. Die Größen Δx definieren gewissermassen die Struktur der Wahrscheinlichkeitsfunktion; man könnte sagen ... je kleiner sie sind, desto geringer sind die Anforderungen die man betreffs der Gleichförmigkeit der primären Verteilung Funktion φ stellen muss, um eine von der Art derselben unabhängige End-Wahrscheinlichkeit zu erhalten.

~~Wie bei mehreren Variablen?~~

ein solches (im Verhältnis zu V äusserst kleines) Δx sich angeben lässt, dass die Funktion $y = f(x_0 + \vartheta . \Delta x)$ sämtliche y Werte innerhalb gewisser Grenzen y_1, y_2 durchläuft, sobald ϑ die Werte von 0 bis 1 durchläuft.

In dem Beispiel der rotierenden Scheibe können wir als x die Zeit t annehmen zu welcher der Strom losgeht, als y die Winkeldistanz (von einem bestimmten Radius bis zur Trefferstelle gerechnet) φ in der Scheibenebene. Es ist also

$$\varphi = ct - 2n\pi$$
$$y = cx - 2n\pi$$

wobei c eine sehr grosse Zahl bedeutet und n immer so gewählt wird, dass φ zwischen 0 und 2π bleibt.

Der oben Δx genannte Bereich ist hier gleich $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$ und es werden offenbar alle Winkel φ gleich wahrscheinlich wenn deren Größe klein ist im Vergleich zu V.

Eine andere derartige Funktion ist z.B.

$y = \sin(\frac{x}{\alpha})$ für genügend kleine Werte α, welcher eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$ entspricht

II.) Die innerhalb eines starren Gefässes sich bewegende elastische Kugel

III.) Das Boltzmann-Gibbs'sche Gasmodell

IV.

Die Überlegungen mittels welcher wir im Obigen das Wesen des Zufalls zu charakterisieren und die Gesetzmässigkeit der zufälligen Wirkungen desselben zu erklären suchten

schienen mir in zweifacher Hinsicht nicht ganz befriedigend zu sein: Die oben entwickelte Erklärung der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsgesetze der Gesetzmässigkeit der Wirkung des Zufalls ist insofern unbefriedigend

1). Es wurde angenommen dass die „Ursache" x einem Wahrscheinlichkeitsgesetz φ(x) befolgt, also dieser Begriff wurde als etwas Primäres vorausgesetzt. Eigenstand der Erklärung war nur die Unveränderlichkeit des resultierenden Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die Wirkung

2). Es wurden gewisse Eigenschaften der Function φ vorausgesetzt welche wir als „Regelmässigkeit" bezeichnet haben. (Handbewegung beim Ingangsetzen des Roulette, Orientierung d. fallengelassenen Würfels)

Was bedeutet es nämlich wenn wir sagen dass die W. (das Eintreten des x) durch eine Function φ(x) Verteilung bestimmt ist? Die Statistik der ... auf Grund unzähliger solcher Spezialfälle gewinnt man dann, auf deren Grund unmittelbar gegeben sind aber nur diskrete Einzelfälle und erst durch Abstraktion die Häufigkeits Function φ zu formulieren.

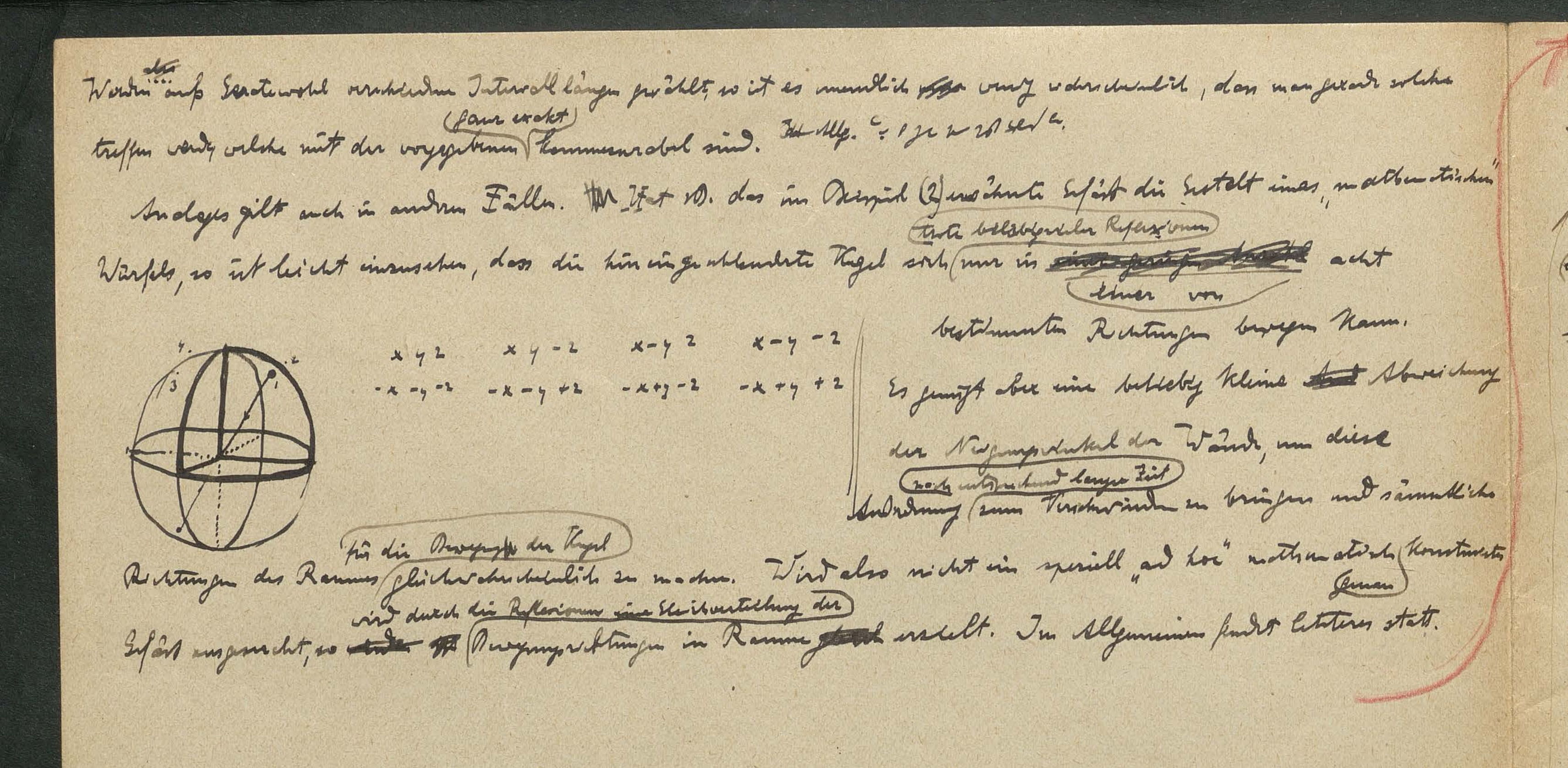
Um die beispielsweise in dem vorher erwähnten Falle (1) Verteilung der Kugeln experimentell festzustellen würde man so vorgehen, dass man eine grössere Anzahl n Kugeln unter ein wenig veränderten unterschiedlichen zu jedesmal Anfangsbedingungen in Bewegung setzt und eine Statistik des uns interessierenden Endresultates anfertigt für beliebig grosse n. Dabei ist es theoretisch allerdings möglich, dass auch für beliebig grosse unendlich n ein vom normalen abweichendes Resultat erhalten wird, falls die betreffenden x Werte entsprechend gewählt würden.

Am klarsten* übersieht man diese Verhältnisse bei der rotierenden Scheibe: im Allgemeinen wird dieselbe von den Schüssen Treffern ungefähr gleichförmig überdeckt sein, falls eine genügende Anzahl der Schüsse in beliebigen Zeit Intervallen abgegeben wird. Würden aber die Intervalle sämmtlich genau gleich der Umlaufzeit τ sein oder wenn sie selbst bei beliebig kleiner Wahl ... τ, 2τ, 3τ, 4τ usw. betragen so würden sämmtliche Treffer auf einen Punkt der Scheibe konzentriert bleiben.

Solche Anordnungen der x-Wertmenge stellen aber offenbar nur singuläre Ausnahmefälle, deren Häufigkeit im Verhältnis zu allen möglichen Anordnungen offenbar verschwindend* klein ist, und dieselbe dürfte auch in allen analogen Fällen stattfinden.

und in analoger Weise sieht man ein, dass unter allen möglichen Intervall-Längen, diejenigen, welche mit der vorgegebenen Umlaufzeit kommensurabel sind, nur einen verschwindend kleinen Bruchteil bilden.

*) In derselben Art wie die ganzen Zahlen irrationalen Zahlen



Werden die aufs Geratewohl verschiedenen Intervalllängen gewählt, so ist es unendlich wenig wahrscheinlich, dass man gerade solche treffen wird, welche mit der vorgegebenen (ganz exakt) kommensurabel sind. [illegible]

Analoges gilt auch in anderen Fällen. Hat z. B. das im Beispiel (2) erwähnte Gefäss die Gestalt eines „mathematischen" Würfels, so ist leicht einzusehen, dass die hineingeschleuderte Kugel sich (nur in ~~[illegible]~~ (trotz beliebig vieler Reflexionen) einer von) acht bestimmten Richtungen bewegen kann.

x y z x y −z x −y z x −y −z
−x −y −z −x −y +z −x +y −z −x +y +z

Es genügt aber eine beliebig kleine ~~Art~~ Abweichung der Neigungswinkel der Wände, um diese Anordnung (nach entsprechend langer Zeit) zum Verschwinden zu bringen und sämtliche Richtungen des Raumes (für die Bewegung der Kugel) gleichwahrscheinlich zu machen. Wird also nicht ein speziell „ad hoc" mathematisch (genau) konstruiertes Gefäss ausgewählt, so ~~[illegible]~~ wird durch die Reflexionen eine Gleichverteilung der Bewegungsrichtungen im Raume ~~[illegible]~~ erzielt. Im Allgemeinen findet letzteres statt.

Das Wort Wahrscheinlichkeit bezeichnet hier also eine objektive, vom Menschen ganz unabhängige Tatsache.

Aber ohne jede Rechnung kann ich voraussetzen, dass alle Bewegungsrichtungen im Laufe der Zeit gleich häufig vorkommen werden und dass ~~[illegible]~~ die Kugel alle Orte des Gefässes andauernd gleich häufig passieren wird. *)

Bekanntlich zeigt die statistische Mechanik, dass derlei Vorgänge durchaus nicht selten sind, im Gegenteil gehören dazu die Bewegungen aller mechanischen Systeme welche gewisse sehr allgemeinen Bedingungen erfüllen.
Handelt es sich ~~[illegible]~~ beispielsweise um Bewegungen molekularer Systeme so wird die Häufigkeit gleichartiger Fälle noch durch den Umstand ausserordentlich vermehrt, dass die Individualität gleichartiger Moleküle (für den physikalischen Effekt) gleichgültig ist.

Natürlich ist ~~auch~~ umgekehrt jeder Wert y durch eine Menge verschiedener x realisierbar, d.h. die inverse Function ist in hohem Grade vieldeutig: dieselbe Wirkung kann durch sehr verschiedene (ursächliche) Konstellationen hervorgebracht sein.

Beispiele derartiger functionaler Zusammenhänge sind leicht zu geben. So können wir im Fall der rotierenden Scheibe als x die Zeit t annehmen, zu welcher der Schuss losgeht, als y die Winkeldistanz θ in der Scheibenebene (von einem bestimmten Radius bis zur Treffstelle gerechnet). Es ist also: $\theta = ct - 2n\pi$, wobei c eine sehr grosse Zahl bedeutet und n immer so gewählt wird, dass θ zwischen 0 und 2π gelegen sei. Der im Obigen als Δx bezeichnete Bereich ist hier gleich $\Delta x = \frac{2\pi}{c}$, und es werden offenbar alle Winkel θ gleichwahrscheinlich sein, wenn diese Grösse klein ist im Vergleich mit dem Schwankungsbereich der Ursache.

Ist (zufällig) α ausserst klein im Vergl. zum (möglich) Schwankungsbereich von x, so

Eine andere derartige Function ist ~~z.B.~~ $y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für genügend kleine Werte α, und

wird $\Delta x = \frac{2\pi}{\alpha}$ und es resultiert

~~zwar~~ entspricht derselben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Als typische Beispiele, wie die oben dargelegten mathematischen Bedingungen auch ohne Rücksicht auf Art und Ursache der primären Schwankungen physikalisch verwirklicht werden können, seien noch folgende Fälle etwas eingehender besprochen:

Eine andere derartige Function ist z.B. $y = \sin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ für genügend kleine Werte α, und zwar entspricht derselben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$W(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

Als typische Beispiele, wie die oben dargelegten mathematischen Bedingungen (auch ohne Rücksicht auf die Art und Ursache der primären Schwankungen) physikalisch verwirklicht werden können, seien noch folgende Fälle etwas eingehender besprochen:

I). Das Galton'sche Brett. Es besteht aus einem geneigt aufgestellten Brett, in welchem in ~~[illegible]~~ regelmässiger Horizontalreihen-Anordnung eine grosse Anzahl Nägel eingeschlagen ist, und zwar derart, dass die Nägel jeder Reihe den Öffnungen der zwei benachbarten Reihen entsprechen. Werden nun von einem gegebenen Punkt aus Kugeln von passender Grösse ~~(so dass sie eben~~ noch ~~zwischen den~~ (so dass ihr Durchmesser wenig kleiner ist als der freie Abstand zwischen zwei benachbarten Nägeln) über das Brett rollen gelassen, so ~~stossen sie an jene Nägel~~ werden sie infolge der Zusammenstösse mit jenen Nägeln aus ihrer Bahn in unregelmässiger Weise abgelenkt und sammeln sich schliesslich nach Passierung sämtlicher Nägelreihen in den am unteren Brettrande angebrachten Behältern an, so dass die Höhe zu der sie in denselben reichen, direkt als Mass der ~~entsprechenden~~ Wahrscheinlichkeit der betreffenden Lage dienen kann.

Es zeigt sich, dass ~~ihre Verteilung~~ sie sich daselbst, dem Gauss'schen Fehlergesetz genau: $y = A e^{-\alpha x^2}$ ~~entspricht~~ anordnen, so dass die meisten sich in der ~~[illegible]~~ Falllinie des Ausgangspunktes ansammeln, während ihre Zahl nach beiden Seiten zu ~~immer weniger~~ abnimmt, nach Massgabe der bekannten Glocken-Curve.

Dieses Resultat ist mathematisch leicht erklärlich, sobald man annimmt, dass ~~die~~ eine jede Kugel nach dem ~~[illegible]~~ Austritt aus der Öffnung zwischen zwei Stiften ~~einer Öffnung~~ ~~einer grossen Nagelreihe~~ ~~[illegible]~~ gleiche Wahrscheinlichkeit dafür besitzt, dass sie zur Rechten ~~oder~~ zur Linken des darunterstehenden Nagels (die nächste Stiftreihe) passiren wird. ~~Denn dann folgt~~ (Dieser Vorgang erfolgt nämlich ~~mag der~~ ganz zufällig, mit gleicher Wahrscheinlichkeit für rechts und links, ~~erfolgen~~.

so lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel beim Passieren der n ten Stiftreihe eine dem n fachen Nagelabstand gleiche seitliche Entfernung aus der Mittellinie besitze, nach dem bekannten Bernoulli'schen Satze zu W(x) =

ermitteln, was für grosse Werte der Zahl n angenähert in die vorerwähnte Formel übergeht.

Es wird also die komplizierte Gesamterscheinung auf einfache Elementarvorgänge zurückgeführt, aber es bleibt noch aufzuklären, wieso letztere als ganz zufällig angesehen werden können, obwohl eigentlich die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit der Kugel die weitere Bewegung derselben eindeutig bestimmen sollte.

Um unkontrollierbare Nebenumstände möglichst auszuschalten, idealisieren wir das Beispiel durch Voraussetzung vollständiger Glattheit der schiefen Ebene, exakter Anordnung der Nägel, exakter Kugelgestalt der Kügelchen und nehmen wir ferner an, der Kugeldurchmesser sei fast genau gleich dem freien Abstand der Nägel und die Stösse der Kugeln an letztere mögen unelastisch verlaufen. Offenbar ist dann die (nach Austritt der Kugel zwischen zwei Stiften) spurenweise übrigbleibende Horizontalcomponente der Geschwindigkeit allein massgebend dafür, ob der nächste Stift auf der rechten oder linken Seite getroffen wird, ob also die Kugel denselben auf der einen oder andern Seite passieren wird. Jene Horizontalcomponente ist aber das Resultat vielfacher Reflexionen der Kugel zwischen jenen zwei Stiften und ist durch die Lage der Centrilinie beim ersten Stoss an die betreffenden Stiftreihe eindeutig bestimmt. Eine ganz minimale Lagen-Änderung dieser Centrilinie genügt um zu bewirken, dass die Richtung jener Horizontalcomponente umgekehrt wird. Bei weiterer äusserst geringer Lagen-Änderung wird dieselbe wieder umgekehrt u.s.w. Wir erkennen also die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: 1) „Kleine Ursachen – grosse Wirkung" und 2) ungenau aber charakteristisch ausgedrückt: „verschiedene Ursachen – gleiche Wirkungen".

Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Function, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel ausdrückt, den analytischen Charakter. Es wird sich die Gauss'sche Glockencurve herstellen, ganz unabhängig davon, wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellationen der Kugeln sei. Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Dieser Vorgang bildet, nebenbei bemerkt, eine treffliche Illustration einer ganzen Klasse physikalischer Erscheinungen: der Diffusionsphänomene, welche wir als Diffusion und Wärmeleitung zu bezeichnen pflegen. Ohne an dieser Stelle in Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir beispielsweise, dass die seitlichen Verschiebungen, welche die Kugel beim Hindurchrollen durch die aufeinander-

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = \int_{-a}^{+a} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \pi$$

Wir werden also allen Einwänden gerecht, wenn wir mit Rücksicht auf diese Umstände [illegible]

~~[illegible]~~ unseren vorherigen Satz ~~Definition~~ in folgender Weise modifizieren:

~~[illegible]~~ Für eine vom Zufall (der zufälligen Ursache)x abhängige Größe y (Wahrscheinlichkeit besteht) ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, falls die ~~[illegible]~~ (den Zusammenhang zwischen y und x darstellenden Funktion derart beschaffen ist, dass) auf die betreffende Variabilität bereits unterstellt einer beliebigen diskreten Punktmenge x (mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmsfälle) immer (annähernd ~~[illegible]~~) im Allgemeinen eine und dieselbe Verteilung der Punktmenge y entspricht.

Diese Def. ist vom math. Standp. [illegible] zu fassen. Aber für unsere Zwecke genügend worauf es ankommt.

Frage nach der ~~[illegible]~~

Noch V. (der erste der zwei vorher erwähnten Punkte mit Rücksicht auf die Genese des Zufalls an uns.)

Dies ist eine mehr formale Bemerkung. (Wichtiger scheint mir ~~ein Umstand, welcher sich auf den ersten Punkt~~ ~~[illegible]~~ (das Gesetz d. großen Zahlen ~~[illegible]~~) (eine zufällige Variabilität der primären ~~[illegible]~~ ~~V. Wahrscheinlichkeit kann nur die Rede sein wenn die wirkende~~ Ursachen (die Anfangsbedingungen in unserer Erklärung bedeuten wir uns die Annahme des Würfelwurfs usw.) ~~innerhalb eines großen Bereichs [illegible]~~ und dies ist ohne weiteres verständlich, wenn es sich um von menschlicher Hand ausgeführte Experimente handelt, es wird da der Zufall in letzter Linie auf (den Menschen, samt seinen unberechenbaren launischen Einfällen, die primum movens ganz ausschaltet, wenn man) physiologische ~~[illegible]~~ psychologische Ursachen zurückgeführt. Wenn man aber annimmt, dass die einen (Vorgang physikalischen) bestimmenden Umstände ganz exact definiert sind, ~~[illegible]~~ kann da der Begriff der W. keine Anwendung finden?

Meist wird dies behauptet, während die Beispiele 1–3 uns eines Besseren belehren. ~~und zwar~~ das Gegenteil

Wird (~~die Anzahl~~ ein Schleuderbrett der ~~[illegible]~~ in ganz bestimmter Weise) ~~[illegible]~~ gemacht ~~und entwirft man eine Statistik~~ eine einzige Kugel auf ein „begrenztes Galton'sches Brett" gesetzt, dessen Stift-reihen ausserordentlich zahlreich sind, und entwirft man eine Statistik der Stelle, wo sie die nacheinanderfolgenden Reihen passiert, so wird man finden, dass ~~[illegible]~~ alle Werte der Abszisse annähernd gleich häufig vorkommen. (sie sind gleich wahrscheinlich) ~~Ebenso sind~~ Im Beispiele (2) lässt sich der Ort, welchen die in bestimmter Richtung hineingeschleuderte Kugel zu einem bestimmten Zeitpunkte annehmen wird, theoretisch vorausberechnen (falls man die Gestalt des Gefässes mathem. exakt kennt) ~~aber~~. Lässt man die abgelaufene Zeit unbestimmt, so sind sie alle ~~Orte innerhalb des Gefässes~~ „gleich wahrscheinlich". ~~Das lässt sich~~

x) Das lässt sich in einem singulär einfachen Spezialfall ohne weiteres nachweisen. Wenn es sich nämlich ~~in einem~~ um ein Quadrat handelt und ~~[illegible]~~ ein Punkt aus einer Ecke unter einem Winkel von 30° geschleudert wird, sieht man leicht ein, dass die durch vielfache Reflexionen hervorgerufenen Auftreffpunkte auf die Seite des Quadrates (im Laufe der Zeit) gleichmässig dicht erfüllen wird. ~~Analog kann man sagen~~: ein Punkt der ~~[illegible]~~ welcher zu einander senkrechte Schwingungen von incommensurabler Schwingungsdauer ausführt $x = a \sin t$, $y = b \sin \alpha t$; ~~Ein komplexeres Wahrscheinlichkeitsgesetz resultiert~~ wird in einem unbestimmten Zeitpunkt an irgend einer Stelle des ~~[illegible]~~ Rechteckes a b mit der Wahrscheinlichkeit $f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{b^2-y^2}}$ anzutreffen sein.

~~[illegible]~~ Analog lässt sich (~~[illegible]~~) (solche Erscheinungen ausgedehnt übertragen ~~Vorgänge behaupten~~), bei welchen dieselbe Art Elementarvorgang sich im Laufe der Zeit immer wieder wiederholt. ~~voraussetzt dass der~~ (Vorgänge nicht exact periodisch) ~~[illegible]~~ bilden dabei ~~[illegible]~~ Ausnahmsfälle?

~~[illegible]~~ der Begriff der Wahrsch. auf alle mit stetig veränderlichen „Parameter"

In der statistischen Mechanik gelangt ist diese Anschauungsweise ~~bedeutet begründet dass~~ daran kund dass man den Begriff „Zeitmittel" an Stelle des damit der Größe nach übereinstimmenden „Raummittels" ~~[illegible]~~ ersetzt.

[illegible]

Diese zwei Bemerkungen machen uns vor Allem auf einen mehr formalen Mangel jener Darstellungen aufmerksam,

Handelt es sich um eine Ursache x welche wir selbst auf noch primärere Ursachen zurückführen können, so könnten wir φ (des Satzes) nur empirisch ermitteln

von welcher überdies die Eigenschaft (2) vorausgesetzt wird. Es wäre also viel rationeller, wenn wir den Umweg über die Einführung der abstrakten Häufigkeits-Funktion φ ganz vermeiden und direkt nur eine grosse Menge von Einzelfällen in Betracht ziehen. Man hätte also an Stelle d. Satzes a. II zu sagen: die Wahrscheinlichkeit der Effekte einer zufälligen Ursache wird bestimmbar, falls der mathematische Kausalzusammenhang zwischen Ursachen und Wirkungen derart beschaffen ist, dass einer beliebig verteilten Menge von x Werten immer annähernd eine und dieselbe Verteilung der zugehörigen y Werte entspricht. Dabei soll das Wörtchen „annähernd" den Umstand ausdrücken, dass exakte Identität der y Verteilungen nur bei unendlich zahlreichen Mengen zu erwarten ist.

und je grösser die Anzahl der Schüsse, desto gleichförmiger wird die Trefferdichte auf der Scheibe

Nun sind aber offenbar auch ganz abweichende Ergebnisse möglich. Wären z.B. alle Zeit-Intervalle gleich und mit der Umlaufszeit der Scheibe kommensurabel, so würden sich alle Treffpunkte an gewissen Stellen konzentrieren, während der Rest der Scheibe leer bliebe. Das wäre ein entscheidender Einwand gegen die Anwendbarkeit der zuletzt gewählten Formulierung, wenn uns nicht die Erwägung zu Hilfe käme, dass derlei abweichende Anordnungen nur gewisse „singuläre" Ausnahmsfälle bilden, deren Häufigkeit —

In der Mengenlehre beweist man bekanntlich, dass es — populär ausgedrückt — unendlich mal so viel irrationale Zahlen gibt als ganze Z

folgenden Stiftreihen erfährt, genau mit den durch die sogen. Brown'sche Molekularbewegung hervorgerufenen Verschiebungen übereinstimmen. Und würden wir, anstatt die Kugeln von einer bestimmten ~~Ausgangs~~ Stelle in der Mitte des Brettes ausgehen zu lassen, so vorgehen, dass aus ~~an~~ allen Öffnungen ~~einer~~ der obersten Stiftreihe auf der rechten Hälfte des Brettes schwarze, auf der linken Hälfte weisse Kugeln austreten, so würde deren allmähliche Vermischung beim Passiren der Stiftreihen genau der Diffusion zweier Gase in den bekannten Versuchen Loschmidt's entsprechen.

II). Ein in mathematischer ~~Analyse~~ Hinsicht komplicirteres, aber physikalisch noch einfacheres Beispiel ist das Folgende: Denken wir uns ein unregelmässig oder sonst ganz beliebig geformtes Gefäss, mit vollkommen reflectirenden Wänden, ~~an dem in welchem sich eine sehr kleine Öffnung befindet, und werfen wir~~ in welches wir durch ein sehr kleines, in einer Wand angebrachtes Loch ein elastisches Kügelchen (am besten ein Gasmolekül) hineinschleudern, und überlegen wir, wann das Kügelchen wieder durch jenes Loch aus dem Gefäss austreten dürfte. Sofern jenes Loch im Verhältnis zur ganzen Wandfläche genügend klein ist, wird die Kugel im Allgemeinen ~~einen~~ infolge der vielfachen Reflexionen einen äusserst komplicirten Zickzackweg zurücklegen müssen, bis es die Austrittsöffnung erreicht, und

Es ist klar, dass eine äusserst kleine Änderung der Anfangsrichtung ~~eine~~ nach längerer Zeit eine sehr erhebliche Änderung der Bahn und damit auch eine ~~[illegible]~~ bedeutende Änderung der Austrittszeit hervorrufen muss. Ebenso begreift man ~~ist klar~~, dass dieselbe Austrittszeit mittels ~~durch~~ sehr verschiedener Anfangskonstellationen zu erreichen ist — man braucht ja nur verschiedene Austrittsbahnen rückwärts zu verfolgen. Es scheint also die Möglichkeit einer ~~Somit sind die Bedingungen für~~ Wahrscheinlichkeitsberechnung ~~erfüllt~~ gegeben zu sein.

Allerdings ist ~~scheint~~ eine exakte mathematische Analyse wohl ~~Berechnung~~ noch nicht durchgeführt worden ~~zu sein~~, aber physikalische Überlegungen aus dem Gebiete der kinetischen Gastheorie, wie auch der Strahlungstheorie, wo dasselbe Problem in anderer Form zur Sprache kommt, machen es plausibel ~~[illegible]~~ dass bei ganz beliebiger Verteilung der Anfangsrichtungen im Laufe genügend langer Zeit eine Ausgleichung der Wahrscheinlichkeiten stattfindet, so zwar dass dann jedes Volumelement jenes Hohlraumes für die Kugel einen gleich wahrscheinlichen Aufenthaltsort bildet, dass sie sich in irgend einer Richtung ~~[illegible]~~ ~~alle Bewegungsrichtungen~~ gleich wahrscheinlich bewegt ~~sind~~ und dass ~~jedes~~ sie durchschnittlich auf jedes Flächenelement der ~~Wand~~ Gefässwand gleich häufig auftrifft. ~~[illegible]~~

~~Ist die~~ Wird die Geschwindigkeit der Kugel mit c, das Volumen des Gefässes mit V ~~die Flächeninhalt der Gefässwand mit F~~ und die Querschnitt der ~~[illegible]~~ freien Öffnung mit ω bezeichnet, so lässt sich nach Analogie mit der Gastheorie leicht nachweisen ~~ist beträgt~~ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel jene Öffnung einmal während des Zeitraumes τ passire: $W = \frac{\omega c}{4V} \tau$ beträgt, also ist die ~~[illegible]~~ durchschnittlich bis zum Austritt der Kugel aus dem Gefäss verfliessende Zeit: $T = \frac{4V}{\omega c}$.

Neigungswinkel der Wände, um diese Anordnung nach entsprechend langer Zeit zum Verschwinden zu bringen und sämmtliche Richtungen des Raumes für die Bewegung der Kugel annähernd gleichwahrscheinlich zu machen. ~~Wird~~ Falls also nicht ein speziell „ad hoc" mathematisch genau konstruiertes Gefäß ausgesucht, so wird durch die Reflexionen eine Gleichverteilung der Bewegungsrichtungen im Raume erzielt. Die theoretische Möglichkeit singulärer Ausnahmsfälle kommt praktisch nicht in Betracht.

(wird so müsste innerhalb einer Schaar derartiger Kugeln schon [illegible] an den Gefäßwänden [(annähernd [illegible] !)])

(~~Überdies [illegible]!~~)

Wir werden aber wohl allen Einwänden gerecht, ~~wenn~~ (zu werden wollen) wir unseren vorherigen Satz in folgender Weise modifizieren: Für eine von der zufälligen* Ursache x abhängige Wirkung y besteht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz, falls die den betreffenden kausalen Zusammenhang darstellende Funktion derart beschaffen ist, dass einer beliebigen diskreten Wertmenge x im Allgemeinen — d. h. mit Ausnahme prozentuell verschwindend wenig zahlreicher Ausnahmefälle — immer annähernd eine und dieselbe Verteilung der ~~Punkt~~Wertmenge y entspricht.**)

(es [illegible] mehr solcher diskreten W. M. x gibt welchen annähernd dieselbe Verteilung entspricht als solche welche merklich abweichende Verteilungen [illegible])

Vom mathematischen Standpunkt aus wäre dieser Satz noch schärfer zu fassen, aber die obige Formulierung dürfte den Grundgedanken, auf welchen es hier ankommt, in genügend verständlicher Weise hervorheben.

**) Offenbar gibt es eine Anziehung an ~~[illegible]~~

*) wobei zufällig im Sinne von [illegible] verstanden ist.

VI.

Noch wichtiger als die mehr formale ~~Bemerkung~~ Frage, mit der wir uns im vorigen Abschnitt beschäftigten, scheint mir die Frage nach der eigentlichen Genese des Zufalls zu sein, welche durch den ersten der beiden (im vorigen Abschnitt) ~~...~~erwähnten ~~[illegible]~~ Einwände nahegelegt wird. (teilweise allerdings auch schon in den betreffenden Beispielen ihre Beantwortung fand) Die zufällige Variabilität der ~~primären~~ Ursachen, auf welche sich unsere Erklärung des Gesetzes der großen Zahlen stützte, ist ohne weiteres

Ebenso ist im Beispiele der zusammengesetzten Schwingung des V. Abschn. die Wahrscheinlichkeit ganz klar definiert als relative Häufigkeit, mit welcher der bewegliche Punkt (innerhalb langer Zeiträume) in einem gewissen Flächengebiete anzutreffen ist, obwohl dabei von einer Variation der die Bewegung bestimmenden Anfangsbedingungen gar nicht die Rede ist.

Es lässt sich nämlich der Begriff der (objektiven) Wahrscheinlichkeit in ganz analoger Weise auf alle solche Erscheinungen anwenden, bei welchen dieselbe Art Elementarvorgang sich (eventuell mit wechselnden „Parameter") im Laufe der Zeit immer wieder wiederholt. Bekanntlich beweist die statistische Mechanik, dass derlei (Bewegungs-)Vorgänge durchaus nicht selten sind; im Gegenteil, es gehören dazu, laut einem Satze von Poincaré, die Bewegungen aller „endlichen" mechanischen Systeme konservativer Art. Sie sind sämtlich „quasi periodisch" (in speziellen Fällen exakt periodisch), d.h. dass

Wir erkennen im Obigen die wesentlichen Züge des „geregelten" Zufalls: (1). „Kleine Ursachen – große Wirkung" und (2). – ungenau aber charakteristisch ausgedrückt – „Verschiedene Ursachen – gleiche Wirkungen". Im Grenzfalle, wenn der Kugeldurchmesser genau gleich dem freien Abstand der Stifte ist, verliert die Funktion, welche den Zusammenhang zwischen Anfangskonstellation und Endlage der Kugel ausdrückt, den analytischen Charakter. Es wird sich die Gauss'sche Glockenkurve herstellen, ganz unabhängig davon, wie klein auch die Schwankung der Anfangskonstellation der Kugeln sei. Wir erhalten ein Modell eines sozusagen ideal zufälligen Vorganges.

Man könnte versucht sein die

Bis in alle Einzelheiten

Sehr einfach lassen sich diese Verhältnisse in einem ähnlichen der zweidimensionalen entnommenen Beispiele übersehen, in welchem die mit den Reflexionen an der Wand verbundenen Diskontinuitäten vermieden werden. Stellen wir uns einen Punkt vor, welchen wir unter Einfluss willkürlich gewählter (voneinander unabhängiger) elastischer Kräfte X, Y eine zusammengesetzte Schwingungsbewegung: $x = a \sin \alpha t$, $y = b \sin \beta t$, ausführen lassen, wie dies beispielsweise bei der Darstellung der Lissajou'schen Figuren in der Akustik geschieht.

Würde es uns gelingen die betreffenden elastischen Systeme (Stimmgabeln) derart einzurichten, dass die beiden Schwingungszahlen mit einander kommensurabel werden, so würde der Punkt eine geschlossene Curve in periodischer Weise zurücklegen, ohne die übrigen Teile des Rechteckes je zu durchstreichen. Der Begriff der W. hätte da keine Anwendung. Es wäre dies offenbar ein ganz ausnahmsweiser Spezialfall, kommt aber nicht in Betracht (Genauigkeit in Betracht), so würde dies welche wir mit menschlichen Hilfsmitteln nie zu erreichen hoffen können, da es unendlich wahrscheinlicher ist, dass sich ein irrationales Verhältnis der Schwingungszahlen einstellt.

Im Allgemeinen entsteht dann eine ungeschlossene Curve, welche jedem innerhalb des Rechteckes a b gelegenen Punkte beliebig nahe kommt, und zwar findet man leicht, dass die relative Zeitdauer (oder bei Häufigkeit), während welcher der schwingende Punkt sich in einem Flächenelement gelegen an der Stelle x y angetroffen wird, gegeben ist durch

$$W(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{b^2-y^2}}\,dx\,dy$$

und zwar ist diese W. S. wie wir sehen von der Art der Kräfte X, Y (resp. d. Schwingungszahlen) im Allgemeinen ganz unabhängig.

Zeitstriche sind nur dafür maßgebend wie rasch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos\beta t}{a\cos\alpha t} = \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\alpha^2 a^2 \cos^2\alpha t + \beta^2 b^2 \cos^2\beta t}$$

$$= \sqrt{\alpha^2(a^2-x^2) + \beta^2(b^2-y^2)}$$

Bemerken wir noch dass durch die obigen Schwingungsgleichungen jedem Punkt innerhalb des Rechteckes a b eine (resp. zwei) Fortschreitungsrichtungen und eine gewisse Bewegungsgeschwindigkeit zugeordnet ist.

Falls nun anstatt eines einzigen vom Nullpunkt ausgehenden Punktes eine ganze Schar derartiger am Anfange willkürlich (über die Fläche des Rechteckes) verteilten Punkten gemäss jenem Gesetze in Bewegung gesetzt wird, so ergeben ganz analoge Überlegungen wie vorher, dass im Allgem. nach entsprechend langer Zeit die Spuren der ursprünglichen Anordnung der Punkte verschwinden und eine von derselben unabhängige Verteilung der Art nach Maßgabe des oben abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsgesetzes resultiert.

In ähnlicher Weise ist verständlich, dass andauerndes Durchrühren zweier in einem Gefässe anfänglich gesonderter Farbstofflösungen im Allgem. eine homogene Mischung bewirkt, dass die einzelnen Gasmolekule, welche in einem geschlossenen Raume ursprünglich beliebig angeordnet wurden, sich in demselben im Laufe der Zeit ohne Rücksicht auf die anfängliche Anordnung so verteilen als ob ihre Lage ganz zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Volumelemente) wären. Dies rechtfertigt aber die Benützung der üblichen Methoden der kinetischen Gastheorie zur Berechnung solcher Größen, in denen die Durchschnittswirkung einer großen Molekülzahl zum Vorschein kommt. In allen derartigen Fällen sind zwar jene Ausnahmsfälle theoretisch möglich, kommen aber wegen ihrer verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit praktisch nicht in Betracht.

(in der Formulierung unseres vorherigen Satzes)

Wenn wir ~~[illegible]~~ aber ~~[illegible]~~ diese Möglichkeit (bereits berücksichtigen, so müssen wir in denselben

diesbezüglichen Einwänden begegnen wollen, so können wir unseren vorigen Satz modifizieren indem wir

~~[illegible]~~ das Wort „immer" durch den Ausdruck „im Allgemeinen." ~~ersetzen~~ ~~[illegible] gleichbedeutend mit [illegible]~~
~~oder~~ d.h. mit Ausnahme [illegible] vereinzelter, sog. [illegible] Ausnahmsfälle –

~~Oder aber~~ ~~[illegible]~~ Vielleicht ist es aber noch richtiger zu sagen
trifft den Kern des Satzes [illegible] die Aussage:

Noch deutlicher aber können wir anstatt dessen sagen: ~~Dass [illegible]~~ y [illegible] W.S. ~~besteht~~ ~~heisst soviel dass~~

(man sagt ~~Dass~~
~~ist~~ ~~[illegible]~~ wenn man ~~[illegible]~~ gewisse Eigentümlichkeiten der)
Für eine von der variablen Ursache x abhängige Wirkung y (~~besteht~~ eine W. S. ~~[illegible]~~ ~~[illegible] dass die~~ (der betreffenden

kausalen Zusammenhang darstellenden Funktion bezeichnen will (nämlich: 1). dass kleine Änderungen von x genau [illegible] an y hervorrufen

können (?) 2). dass ~~[illegible]~~ die ~~Anzahl der Werte~~ Menge der ~~[illegible]~~ Gruppierungen von x-Werten, welchen annähernd ~~[illegible]~~ ~~gleichartige~~ eine und dieselbe

y Gruppierungen (in jedem endlichen Abschnitt) entsprechen, unermesslich unendlich zahlreicher ist als die Menge der x Gruppierungen, welche merklich

abweichende y Verteilungen hervorrufen.

Von m. St. aus . . . vollständige Zufälligkeit und [denn entsprechend Reinheit der] Wahrscheinlichkeit (relativ offenbare) (einen Idealfall darstellt) (welcher in Wirklichkeit (nur) [illegible])

~~Nur darauf [illegible] sei noch speziell aufmerksam gemacht, dass~~ es offenbar eine grössere oder mindere

Annäherung erreicht wird, ~~genau [illegible] der [illegible]~~ In der ~~[illegible]~~ praktischen Anwendung der W.R.

begnügt man sich dabei meist mit einer sehr rohen Annäherung vollkommen befriedigt.

Nur ~~[illegible]~~ ~~einen~~ Umstand ~~[illegible]~~ sei noch speziell hervorgehoben, welcher in den oben Beispielen wie auch in allen unseren

Beispielen zu Tage tritt: dass ~~nämlich~~

Um diese reinphysikalische Genese des Zufalls noch klarer zu überblicken [verstehen], wollen wir noch einen Vorgang betrachten, den man als vollkommensten Typus des „reinen" [physikalischen] Zufalls ansehen kann, d.i. der radioaktive Atomzerfall.

Bekanntlich zerfallen alle Atome des Radiums im Laufe der Zeit, indem sie sich durch explosive Abschleuderung je eines α-Teilchens in Atome der Radium-Emanation verwandeln. Dabei geht dieser Vorgang nach einem bestimmten Gesetz vor sich; Dabei kontrahiert aber an (der Ra-Atome ... Evolution (wie bei der Alterung der Organismen) konstatieren / wahrnehmen; wann ein beliebiges gerade ins Auge gefasstes Atom einen Zerfall erleidet, das ist absolut zufällig und (es lässt sich das) in keiner Weise weder beeinflussen noch voraussehen.

(bei denen man die Stärke λ in Übereinstimmung mit der betreffenden Zerfallskonstante des Ra setzen könnte)

Hätten wir eine (die große) Anzahl derartiger Gefäße von ganz gleicher Gestalt und würden in jedem dieselben eine solche Kugel in einer beliebigen Richtung in Bewegung gesetzt, so würden die (bisher) in Rede stehenden Erscheinungen — Herausstoß der Kugel aus einem der Gefäße (und Abschleuderung einer α-Partikel aus einem der Radium-Atome / (wie fliehen würde)) in ganz analoger Weise vor sich gehen.

Selbstverständlich glaube ich nicht, dass die Ra-Atome wirklich derart gebaut sind, aber es kommt uns nur auf die prinzipielle Möglichkeit der Konstruktion eines derartigen (reinphysikalischen) Modelles (des Zufalls) an.

Sie beweist jedenfalls, dass der scheinbare Widerspruch (die im vorstehenden eingangs aufgeworfene „zweite Frage"?), der Zufälligkeit betonte, in Wirklichkeit nicht besteht, und dass der Zufall — in dem in der Physik gebräuchlichen Bedeutung des Wortes — sehr wohl durch exakt definierte gesetzmäßige Ursachen hervorgebracht werden kann.

Diese Art Zufall spielt naturgemäß eine hervorragende [maßgebende] Rolle in der Welt der Moleküle und es gibt verschiedene (dahin gehörige) Erscheinungen wie z.B. die Brown'sche Molekularbewegung — welche das Walten des Zufalls [jene Zufälligkeit] in ganz anschaulicher [charakteristischer] Weise erkennen lassen. Man könnte vielleicht, um solche Fälle den durch das willkürliche Eingreifen eines lebenden Organismus verursachten gegenüberzustellen von „molekularem" und „physiologischem" Zufall sprechen; und diese würden sich oft zu komplexeren Zufallserscheinungen verketten.

Auf die weiter sich erhebenden Fragen, ob sich alle Zufallserscheinungen auf die obigen zwei Typen zurückführen lassen und (inwiefern) vielleicht im Grunde auch der „physiologische" im „molekularen" wurzelt, wollen wir nicht weiter eingehen. Überhaupt sei nochmals wiederholt, dass unsere Studie durchaus nicht eine erschöpfende Analyse aller mit dem Wahrscheinlichkeits-

Solche Vorgänge sind in gewissem Sinne mit den „zyklischen Bewegungen" Helmholtz's verwandt, aber eben darin von denselben verschieden, dass der Parameter der Bewegung sich jedesmal fortwährend ändert. Wenn man dabei die Einzelheiten des zeitlichen Ablaufs der zugrunde liegenden Erscheinung (absichtlich) ignoriert und achtet nur auf den in Rede stehenden Endeffekt, so tritt die „Zufälligkeit" derselben klar hervor. Dies scheint mir die Genese des Zufalls in den uns gerade am meisten interessierenden Fällen der theor. Physik zu sein. (?

~~Als geradezu typisches Beispiel eines rein zufälligen Vorganges sieht man heute den radioaktiven Atomzerfall~~

Die Wahrscheinlichkeit, dass es unter Ausschleuderung eines α oder β Partikels einen Zerfall erleidet ist proportional der Länge dieses Zeitraums dt. Mathematisch ausgedrückt: ($W\,dt = \lambda\,dt$ wobei die Größe λ eine absolute Konstante, welche sich durch keine uns bekannten Agentien beeinflussen lässt.

Auf Grund des Vorhergesagten kann man nun ohneweiteres ein Modell des (in dieser Erscheinung zum Vorschein kommenden) Zufalls geben: das Öffnen des Gefäßes mit der hineingeschleuderten Kugel. Befindet sich in der Wand des Gefäßes eine (im Vergleich zu der ganzen Oberfläche kleine) kreisförmige Öffnung, so wird die Kugel solange (zwischen den Wänden) in komplizierten Zickzackwegen hin und her geschleudert werden bis sie gerade auf jene Öffnung ankommt und durch dieselbe nach Aussen fliegt. und zwar ist leicht nachzuweisen dass auch hier die Wahrscheinlichkeitsformel gilt, wobei und zwar wird λ = (wenn man die Dimensionen der Kugel als klein annimmt) im Verhältnis zum Durchmesser der Öffnung).

Allgemein „molekularer Zufall" und „physiologischer Zufall" (vielleicht ist letzteren durch ersten vermacht?)

Siederverzug
Molekularer Z. direkt sichtbare Wirkungen wo labiles Gleichgewicht
Kondensation
Übersättigung, Ionen, Molekül

Wenn ein Draht durch wachsende Spannung, eine Hohlkugel durch inneren Überdruck beansprucht wird, so sagt man es hängt der Ort wo ein Bruch stattfindet, die Form der Bruchstücke u.s.w. „vom Zufall" ab. In Wirklichkeit können es kleine Ungleichförmigkeiten der Dicke usw sein, welche indirekt auf den physiologischen Zufall bei Herstellung des betreffenden Objektes zurückzuführen sind. Aber auch wenn diese durch genügend grosse Sorgfalt, entsprechende maschinelle Vorrichtungen beliebig klein gemacht sind, bleiben zufällige Ungleichförmigkeiten im Gefüge des Materials und diese rühren vom molekularen Zufall her. Wird beim Gusse der Hohlkugel auch noch so vorsichtig verfahren, es müssen derartige Ungleichförmigkeiten eintreten. Das Erstarren beruht nämlich auf der Bildung von Krystallisationskernen in der unterkühlten Schmelze; die Zahl und Anordnung derselben wird aber vom molekularen Zufall bestimmt, der letztere ist somit für die (mikro)krystallinische Struktur des Gussstückes verantwortlich welche für die Festigkeitseigenschaften massgebend ist.

(Ausserdem bestehen auch in jedem Krystall zeitweilige zufällige Festigkeitsungleichheiten, infolge der Molekularbewegung) aber diese sind dauernd von verschiedenen Stellen.

~~zusammenhängendes Problem geben sollte.~~ Wir glauben aber Es scheint uns aber ein wichtiges und für den Philosophen interessantes Ergebnis zu sein, wenn sich auch nur auf einem beschränkten engen Gebiete – dem der mathematischen Physik – zeigen lässt, dass der Begriff der Wahrscheinlichkeit – in der üblichen Bedeutung eines Häufigkeitswertes – einen streng objektiven Sinn besitzt dass man den Begriff und die Genese des Zufalls genau präzisieren kann (– auch wenn man am Prinzip d. Determinismus festhält –) und dass sich dabei das Gesetz der grossen Zahlen nicht als ein mystisches Prinzip und nicht als rein empirischer Erfahrungssatz sondern als ganz einfache mathematische Folge der speziellen Form ergibt, welche in diesen Fällen der Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung darstellt.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, ausdrücklich noch zu bemerken, dass (Der Wahrsch.-Rechnung kommt im Sinne dieser Auffassungsweise) natürlich nicht der Wert eines ~~prinzipiell~~ von den sonstigen Naturerkenntnissen unabhängigen wesentlich neuen Forschungsprinzipes zu, da sie indem sie nur ~~sich~~ eine (vereinfachende statistische Schematisierung gewisser in der Natur sehr häufig auftretender funktioneller Zusammenhänge bildet, ~~welche~~ deren (exakte Untersuchung ~~...~~) ~~...~~ infolge ihrer Kompliziertheit ~~eine~~ ~~[illegible]~~ genaue Untersuchung sehr erschwert ~~ist~~. ~~Das~~ Als das charakteristische Prinzip der jetzigen (theoretischen) Physik ~~ist~~ muss die Zersplitterung ~~Auflösung~~ der physikalischen Erscheinungen in verborgene Teilvorgänge anerkannt werden, wenn wir auch sehen, wie das; Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit ~~[illegible]~~ spielen dabei eine wichtige ~~[illegible]~~ Rolle als (anschaulicher, abkürzender Hilfsbegriffe, könnten aber zur Not auch vollständig entbehrt werden *) indem sich ~~und~~ ~~[illegible]~~ ~~durch~~ durch exakte statistische Betrachtung ~~an Stelle~~ jener schematisierenden Methoden) ~~[illegible]~~ vertreten ~~[illegible]~~ lassen sollten.

*) Darin besteht ~~[illegible]~~ wohl (der wesentliche Unterschied) dass (Darwin (Mendel, Boltzmann etc.) und der statist. Arbeit Gibbs dass sie erstere auf gewisse, recht plausible (intuitive Zufalls- und Wahrsch.-Ideen stützt, allerdings) aber nicht beweisbare) stützt, während letztere unter Vermeidung derselben ~~mittels~~ auf exakt statistischer Methode ~~[illegible]~~ aufgebaut ist. ~~[illegible]~~ — (wenigstens im Prinzip, wenn auch nicht ganz in der Durchführung) —

~~Der praktische Vorteil der W.R. wird daher~~ ~~Der praktische~~

Unsere Darlegung dürften aber auch allerdings den Grund hinreichend aufklären ~~[illegible]~~ ~~die~~ wieso die Anwendung jener Begriffe unter Vernachlässigung der Details der funktionellen Zusammenhänge ~~eine~~ doch ~~[illegible]~~ hinreichend genaue End-Ergebnisse zu liefern pflegt ~~kann~~ und wir verstehen dass sie namentlich im Gebiet ~~der~~ empirischer Wissenschaften, wo eine exakte mathematische ~~Kontrolle~~ Verfolgung der Teilvorgänge ausgeschlossen ist, ~~die einzig~~ ein unschätzbares Hilfsmittel bildet.

$W(x)\,dx = \varphi(x)\,dx$

$y = f(x)$

$W(y)\,dy = \varphi(f(x))\,\frac{dy}{f'(x)}$

Die Gesetze des Zufalls. Zufall und physikalisches Gesetz. Zufall und objektive Wahrscheinlichkeit in der Physik.

Es ist schon öfter hervorgehoben worden, eine bekannte Tatsache: Man kann wohl mit Recht behaupten, dass keine zweite mathematische Disziplin auf (so unklare und schwankende) Grundlagen aufgebaut ist, wie die Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Sogar die Frage, deren Beantwortung (die eigentlich) Vorbedingung für eine rationelle Anwendung dieser Rechnungsmethode bilden sollte, die Frage ob der Wahrscheinlichkeitsbegriff nur ein subjektiver Begriff sei oder wie eine eventuelle objektive Bedeutung [Inhalt] dieses zu präzisieren sei, hat von verschiedenen Seiten grundverschiedene [diametral] Beantwortung erfahren. Anfänglich nahmen an der Diskussion dieser Streitfrage nur Mathematiker und Philosophen teil, heute aber muss auch dafür der moderne Physiker vor Allem interessieren, hat ja die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche zum ersten Male von Clausius und Maxwell in der kinetischen Gastheorie angewendet wurde, in den letzten Zeiten infolge des Ausbaues der atomistischen Theorien der Materie, der Elektronik, Radioaktivität und Strahlungstheorie eine so umfassende Bedeutung für die theoretische Physik erlangt, dass sie geradezu die universellste Untersuchungsmethode im Gebiete derselben bildet und gerade bei den tiefstgehenden Forschungen anzuwenden.

Heute scheinen doch sämmtliche physikalischen Gesetze mit wenig grundlegenden Ausnahmen (Maxwell's elektromagnetische Gleichungen für den Äther, Energiegesetz, Gravitationsgesetz, Relativitätsprinzip) nur der Superposition komplizierter Einzelvorgänge zu entspringen, wobei die scheinbare Einfachheit und Regelmässigkeit derselben nur eine sekundäre Wirkung des Wahrscheinlichkeitsgesetzes „der großen Zahlen" ist. Und es ist wohl möglich dass auch jene Ausnahmen im Laufe der Zeit zum Teil dereinst auf statistische Regelmässigkeit reduziert werden.

Trotz dieser enormen Ausdehnung d. Anwendungsbereiches der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die exakte Analyse der zugrunde liegenden Begriffe nur geringe Fortschritte gemacht, da auch die Physiker meist damit begnügen auf ein intuitives Wahrsch.-Gefühl zu berufen. Die Mathematiker pflegen diesen Fragen, die Präzisierung der für die Anwendbarkeit derselben charakteristischen Bedingungen, mit Vorliebe auszuweichen, indem sie sich darauf berufen, dass die Wahrsch. Rechnung nur dazu dient, um die Wahrscheinlichkeit komplizierter Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse abzuleiten, wobei letztere von vornherein gegeben sein müssen (Poincaré ...

Die Philosophen wenden ihre Aufmerksamkeit meist der psychologischen, logischen oder erkenntnistheoretischen Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu – wobei vor Allem die subjektiven Momente derselben in den Vordergrund treten, und pflegen gerade an den Fragen vorüberzugehen, die den Physiker interessieren: nach der Art der objektiven Vorgänge, auf welche jener Begriff berechtigter Weise anzuwenden ist und durch jenen Begriff dargestellt sind.

Mit der vorliegenden Studie möchte ich einen Impuls zu Untersuchungen geben, in welchen gerade jene objektiven Momente in den Vordergrund gerückt werden. Angesichts dessen, dass Wahrscheinlichkeit ein recht vieldeutiger Begriff ist (wie z.B. Meinong treffend bemerkt hat), sei auch von vornherein hervorgehoben, dass wir denselben in dem sehr eingeschränkten „mathematischen" Sinne gebrauchen werden, wie er in der theoretischen Physik zur Anwendung kommt,

S. d. p. 2. (Timerdig) →

(aber oft zur Kennzeichnung eines subjektiven Vermutungsgrades dient und dass es auch

Wir erkennen ohne weiteres an dass das Wort Wahrscheinlichkeit auch) in Fällen gebraucht wird, welche überhaupt keiner zahlenmäßigen Größenordnung zugänglich sind, aber diese Bedeutung jenes Wortes ~~ist uns als Phys~~ so sehr sie den Psychologen interessieren mag — ist uns als Physikern ganz fremd.

kommt bei unseren Überlegungen gar nicht in Betracht. Es verhält sich damit ähnlich wie mit vielen anderen Begriffen (die der Physiker in wesentlich anderem Sinne ~~Weise~~ gebraucht als dies im gewöhnlichen

(– wie z. B. Kraft, Arbeit, Energie, Wärme usw.)

Leben üblich ist.

Da wir die W. R. auf zufällige Ereignisse anwenden

Ausgangspunkt

~~[illegible]~~ Die grundlegende Frage, von der alles Weitere abhängt, scheint mir nun zu sein: Was ist der Zufall? Damit hängen die wie für meinen Zweck weiteren Fragen zusammen: Wie ist es möglich dass sich der Effekt des Zufalls berechnen lasse, dass also ~~die~~ zufällige Ursachen ~~regel~~ gesetzmäßige Wirkungen haben? und andererseits: Wie ist es möglich dass.

Wie kann der Zufall entstehen, wenn nur alles Geschehen auf regelmäßige Naturgesetze ~~[illegible]~~ wirklich [illegible] ist ~~[illegible]~~ oder mit anderen Worten: wie können regelmäßige Ursachen eine zufällige Wirkung haben?

Betrachtet man in populärer Weise den Zufall als die Negation des Gesetzmäßigen so ~~ist der~~ sind diese Widersprüche wohl unüberbrückbar. Meist pflegt man somit vom (deterministischen) Standpunkt aus ~~einen gesetzmäßigen Verlauf d~~ anzunehmen dass (der Verlauf) „zufälliger" Ereignisse zwar durch innere Gesetze geregelt wird, dieselben uns aber unbekannt sind, wodurch der Schein der Gesetzlosigkeit erzeugt wird. (   )

Diese ~~Ursprüngliche~~ Auffassungsweise ~~[illegible]~~ beantwortet also auch die Frage nach dem ~~inneren~~ Werte der W. R., dahin, dass dieselbe eine ~~abkürzende~~ Rechnungsmethode bildet welche als abkürzende und vereinfa

Die Wahrsch. Begriffe – ~~[illegible]~~ das sei noch speziell hervorgehoben – ~~bilden~~ beruhen somit auf dem Hervorheben

Der Wert der besteht also darin, dass

nicht etwa darin, dass ~~sie~~ sie neben die übrigen physikalischen und mathematischen Prinzipien ~~Fremdes und~~ ein denselben fremdes und von denselben unabhängiges Wahrsch. Prinzip ~~aufgestellt wird~~ setzen, sondern dass ~~sie~~ sie aus dem Gebiete sehr komplizierter verschiedenartigen kausaler Relationen eine sehr charakteristische und häufig vorkommende Art von Funktionalzusammenhängen hervorgehoben ~~[illegible]~~ was eine ~~[illegible]~~ außerordentliche Vereinfachung und Abkürzung der betreffenden Überlegungen ermöglicht aber prinzipiell nichts Neues bringt.

Paradox Bertrand,

